

621.3
К 84

Д 2 П

К. А. КРУГ

О С Н О В Ы Э Л Е К Т Р О Т Е Х Н И К И

II

4436
27.2

ГОИТИ ♦ НКТП ♦ СССР
8 8 8 8

621.3
К84

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

Проф. К. А. КРУГ

20 ИЮЛ. 1938

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Том II

ТЕОРИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ТОКОВ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ
ПЕРЕРЕБОТАННОЕ

Утверждено ВКВШ при СНК СССР
в качестве учебника для энергетических вузов

Цена 4 р. 50 к., пер. 1 р. 50 к.

12.82.080



РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
РЕДАКЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА

1938

ЛЕНИНГРАД

Индекс ЭЭ-10-5-2

Пр. ТРК № 25 от 5/VI-38 г.

Редактор инж. Н. Н. Курдюков и А. Д. Смирнов.
Технич. редактор, В. Н. Шипов.

Сдано в производство 10/IV-38 г.

Подписано к печати 7/VII-38 г.

Формат бумаги 60×92¹/₁₆

Колич. печ. листов 17.

Учетно-авт. листов 21,8.

Колич. бум. листов 8,5.

Колич. печ. знак в 1 бум. листе 117648.

Авторских листов 19,45.

Энергоредакция № 131.

Заказ № 330.

Тираж 15000. Учетный № 7578.

Уполн. Главлита № Б-40921.

Отпечатано на бумаге Камской фабрики.

4-я тип. ГОНТИ НКТП СССР «Кр. Печатник», Ленинград, Международный, 75а.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава первая

Синусоидальные переменные токи

	Стр.
1. Периодические переменные токи	5
2. Синусоидальные напряжения и токи и их изображение	8
3. Вспомогательные теоремы	10
4. Эффективные и средние значения тока и напряжения	14
5. Составные элементы цепи переменного тока	17
6. Сопротивление в цепи переменного тока	18
7. Индуктивность в цепи переменного тока	19
8. Емкость в цепи переменного тока	26
9. Последовательное соединение сопротивления, индуктивности и ем- кости	31
10. Общий случай последовательного соединения	34
11. Ток и напряжения в цепи, содержащей r , L и C в зависимости от частоты. Резонанс напряжений	37
12. Активная и реактивная проводимости цепи	43
13. Общий случай параллельного соединения	46
14. Резонанс токов	50
15. Падение и потеря напряжения	53
16. Предельная мощность при передаче энергии	54
17. Измерение мощности	57
18. Ось времени	60

Глава вторая

Символический метод

19. Основные положения теории комплексов	60
20. Применение символического метода к теории переменных токов	62
21. Законы Ома и Кирхгофа в символической форме	66
22. Мощность в комплексной форме	71
23. Нахождение распределения токов в сложных цепях	72
24. Мостик Уитстона при переменном токе	78
25. Мостик Шеринга	81
26. Схемы для получения сдвига фаз в 90°	82
27. Схемы Бушера	84
28. Взаимная индуктивность в цепях переменного тока	88
29. Передача энергии в контурах с магнитной связью	94
30. Общий метод нахождения распределения токов в сложных развет- вленных цепях (метод контурных токов)	97
31. Схемы замещения и уравнения напряжений и токов	101
32. Определение постоянных четырехполюсника	104

Глава третья

Круговые диаграммы

33. Прямые и обратные векторы	108
34. Сопротивление и проводимость как обратные векторы	111
35. Простейшие круговые диаграммы	114
36. Круговая диаграмма общей схемы замещения	120
37. Представление простейших геометрических мест при помощи век- торных уравнений	126
38. Круговая диаграмма четырехполюсника	128
39. Круговая диаграмма четырехполюсника при постоянных значениях напряжения на концах его	133

Глава четвертая Многофазные системы

	Стр.
40. Многофазные токи	136
41. Симметричные и несимметричные системы	137
42. Соединение звездой	139
43. Соединение многоугольником	145
44. Смешанные соединения и преобразование симметричного много- угольника в симметричную звезду и наоборот	148
45. Уравновешенные многофазные системы	151
46. Топографические диаграммы	153
47. Неодинаковая нагрузка трехфазной системы	156
48. Определение очередности фаз. Опрокидывание фаз	168
49. Преобразование треугольника в звезду и обратно	170
50. Измерение мощности трехфазного тока	175

Глава пятая

Поверхностный эффект

51. Неравномерное распределение плотности тока	180
52. Дифференциальные уравнения распределения тока в цилиндрических проводниках	181
53. Распределение плотности тока в цилиндрических проводах	183
54. Активное и реактивное (внутреннее) сопротивления цилиндрических проводов при переменном токе	189

Глава шестая

Несинусоидальные переменные токи

55. Периодические функции и ряд Фурье	191
56. Нахождение амплитуд и фаз гармоник аналитическим способом	195
57. Разложение трапеции в ряд Фурье	197
58. Разложение в ряд выпрявленных синусов	200
59. Способ Перри	202
60. Графический способ Роте	204
61. Разложение кривых на высшие гармоники по способу Рунге	207
62. Графический способ разложения в ряд Фишер-Гиннена	209
63. Явления в цепях переменного тока с несинусоидальными напряжениями	211
64. Измерение несинусоидальных токов	215
65. Влияние формы кривых напряжения на определение элементов цепи	218
66. Резонансные кривые	219
67. Мощность несинусоидальных токов	220
68. Активная и реактивная мощности несинусоидальных токов	222
69. Мощность искажения	227
70. Последовательное и параллельное соединения при несинусоидальных токах	228
✓ 71. Влияние формы кривой э. д. с. на форму кривой изменения магнит- ного потока	231
72. Высшие гармоники в трехфазных системах	234

Глава седьмая

Прохождение переменного тока через катушки с железным сердечником

73. Кривые напряжения и тока без учета гистерезиса	239
74. Явление гистерезиса в цепях переменного тока	242
75. Потери на вихревые токи	244
76. Неравномерное распределение магнитной индукции в железных ли- стах	248
77. Общие потери в железе	252
78. Потери при вращательном намагничивании	255
79. Катушки с железом	256
80. Трехфазные катушки с железом	262
81. Последовательное соединение катушки с железом и конденсатора	265
82. Параллельное соединение катушки с железом и конденсатора	269
Алфавитный указатель	271

ГЛАВА ПЕРВАЯ

СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ТОКИ

1. Периодические переменные токи

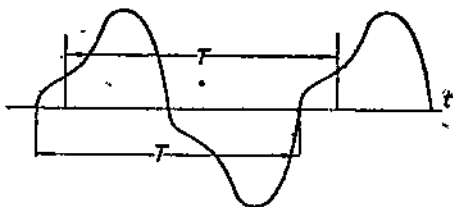
Под переменными токами можно понимать любые токи, величина которых меняется в течение времени, в том числе и так называемые постоянные токи или токи постоянного направления, изменяющие свою величину в зависимости от времени, например, ток при зарядке конденсаторов или при включении индуктивных катушек.

Однако под переменными токами обыкновенно понимают, если нет особых оговорок, такие токи, которые через определенные промежутки времени меняют свое направление и значения которых представляют собой периодическую функцию времени:

$$i = \varphi(t) = \varphi(t+T) = \varphi(t+2T) = \dots = \varphi(t+kT). \quad (1,1)$$

В отношении терминов может быть было более правильным называть переменные токи возвратными токами, а постоянный ток — прямым током.

Время T , в течение которого ток или соответствующая э. д. с. совершает полный цикл своего изменения (фиг. 1), после чего опять повторяются те же значения в той же последовательности, называется периодом или циклом переменного тока, а число периодов или циклов в единицу времени — частотой колебаний или просто частотой:



$$f = \frac{1}{T}; fT = 1. \quad (1,2) \quad \text{Фиг. 1. График периодической функции.}$$

Частота измеряется в герцах. Колебание имеет частоту, равную одному герцу ($1 \text{ Hz} = \frac{1}{\text{sec}}$), когда оно в одну секунду совершает полный цикл или полный период.

В технике сильных токов переменные токи получаются при помощи вращающихся машин, в которых проводники движутся в магнитном поле, создаваемом постоянным током. При этом или проводники вращаются в магнитном поле или же проводники остаются неподвижными, а вращается магнитное поле.

Простейшей такой машиной или генератором переменного тока является замкнутый проводник или контур, вращающийся в однородном магнитном поле между двумя полюсами с постоянной угловой скоростью. В таком генераторе каждый оборот соответствует одному полному периоду и угловая скорость равна

$$\omega = 2\pi f. \quad (1,3)$$

При вращении плоскость контура меняет свое положение по отношению к магнитному полю, и угол α между плоскостью контура и плоскостью, перпендикулярной к направлению поля (фиг. 2а), изменяется пропорционально времени $\alpha = \omega t$.

В соответствии с этим магнитный поток, пронизывающий контур, изменяется при вращении пропорционально косинусу угла α :

$$\Phi = B_m \cdot 2al \cos \alpha = \Phi_m \cos \omega t, \quad (1,4)$$

где $2al$ — площадь контура, а $\Phi_m = B_m \cdot 2al$ — максимальное значение потока, пронизывающего контур.

А э. д. с., наводимая во вращающейся обмотке, будет изменяться по закону синуса

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} = \omega w \Phi_m \sin \omega t, \quad (1,5)$$

где w — число витков вращающейся обмотки, которую мы предполагаем осуществленной таким образом, что все витки лежат в одной плоскости и пронизываются в любой момент одним и тем же магнитным потоком.

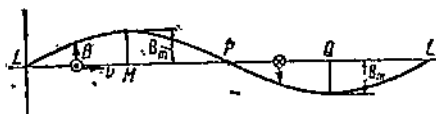
То же выражение для наводимой э. д. с. мы получим, если просуммируем э. д. с. e' , наводимые на отдельных так называемых активных участках (отрезках) каждого витка (mn и pq) при движении их в магнитном поле с линейной скоростью $v = 2\pi af = \omega a$ в результате пересечения магнитных индукционных линий

$$\left. \begin{aligned} e' &= l B_m v \sin(\overline{B_m v}) = l w B_m \sin \alpha = l B v, \\ e &= 2we' = 2wl\omega a B_m \sin \omega t = \omega w \Phi_m \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1,6)$$

Наводимая на отдельных участках обмотки э. д. с. e' пропорциональна проекции вектора магнитной индукции на направление, перпендикулярное к направлению движения проводника в магнитном поле $B = B_m \sin \alpha$. Поэтому, если однородное магнитное поле заменить таким полем, в котором магнитная индукция была бы во всех точках нормальна к направлению движения проводника и изменялась бы вдоль окружности по закону синуса, то получится такая же э. д. с., как и при вращении контура в однородном магнитном поле.

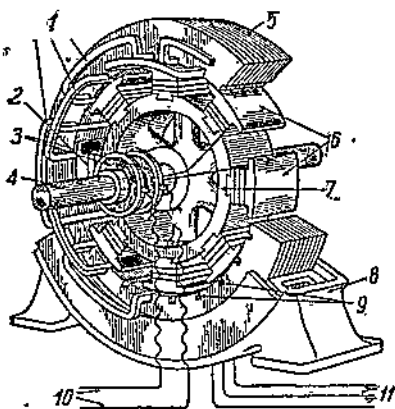
Соответствующее синусоидальное распределение магнитной индукции показано на фиг. 2б, на которой $LMPQ$ — развернутая длина окружности, описываемой какой-нибудь точкой активной длины проводника.

Примерно такое распределение магнитной индукции мы обычно имеем в электрических машинах, в которых для получения сильных магнитных полей магнитный поток проходит через железо на всем своем протяжении за исключением воздушного промежутка, отделяющего подвижные части машин от неподвижных. Синусоидального распределения магнитного поля стремятся достигнуть, или придавая полюсам соответствующие очертания (при выступающих полюсах) или соответствующим распределением вдоль воздушного зазора намагничивающей обмотки, создающей магнитное поле (при неявных полюсах).



Фиг. 2б. Синусоидальное распределение поля.

Для получения надлежащей частоты (числа периодов в секунду) при тихоходных первичных двигателях приходится прибегать к многополюсным машинам. Такая многополюсная машина с вращающимися полюсами представлена на фиг. 3. Полюсы имеют одинаковое очертание, и после того как они повернутся на двойное полюсное деление (2τ), все провода будут иметь такое же положение по отношению к полюсам, как и перед этим, так что поворот полюсного колеса на угол $\frac{2\pi}{p}$, где $2p$ — число полюсов будет соответствовать одному полному периоду наводимой в обмотке э. д. с. Если машина делает n_{min} оборотов в единицу времени, то частота равна



Фиг. 3. Схема многополюсного генератора.

1 — обмотка статора, 2 — обмотка ротора, 3 — контактные кольца, 4 — щет, 5 — активное железо статора, 6 — полюсные башмаки, 7 — обод ротора, 8 — станина, 9 — пазы статора, 10 — выводы обмотки ротора, 11 — выводы обмотки статора.

Для специальных целей в технике сильных токов применяются и другие частоты. Так, для однофазных электрических дорог $f = 12\frac{1}{2}$ Hz и $f = 16\frac{1}{3}$ Hz, для быстроходных двигателей $f = 100$ Hz и т. п.

В технике связи употребляемые частоты гораздо более высокого порядка, особенно в радиотехнике, где частоты измеряются в килогерцах ($1 \text{ kHz} = 1000 \text{ Hz}$) и доходят до десятков тысяч килогерц.

Переменные токи таких больших частот получают уже не механическим путем, а при помощи колебательных контуров, состоящих из последовательно соединенных емкостей и индуктивностей. Колебания в таких контурах поддерживаются при помощи так называемых генера-

$$f = \frac{pn_{min}}{60} \text{ Hz.} \quad (1,7)$$

В европейских и во всех других странах кроме США для передачи и распределения энергии установилась в качестве стандартной частота $f = 50 \text{ Hz}$. В США стандартной частотой является $f = 60 \text{ Hz}$.

торных катодных ламп, питаемых от постоянного тока и связанных обратной связью с колебательным контуром.

Задача 1. Определить, какое число оборотов в минуту должен делать генератор, имеющий $2p = 28$ полюсов, чтобы давать переменный ток с частотой $f = 50 \text{ Hz} = \frac{50}{\text{sec}}$.

Решение.

$$f = \frac{pn_{\min}}{60} \text{ Hz}; n_{\min} = \frac{60f}{p \text{ Hz}} = \frac{60 \cdot 50 \text{ Hz}}{14 \text{ Hz}} = 214 \frac{2}{7} \text{ об/мин.}$$

2. Синусоидальные напряжения и токи и их изображение

Получаемые при помощи машин или другим путем периодические э. д. с. переменного тока могут изменяться в течение периода и не по закону синуса, и вообще говоря, кривые изменения их могут иметь любую форму. Но синусоидальное изменение характерно тем, что лишь в этом случае как э. д. с. и напряжения, так и токи изменяются по одному и тому же закону — по закону синуса. В остальных случаях при наличии в цепи индуктивности или емкости напряжения и токи будут изменяться по-разному. Поэтому синусоидальное изменение, называемое также гармоническим изменением, представляет собой наиболее простой закон периодического изменения.

Синусоидальная э. д. с. получается в том случае, когда внутри контура магнитный поток или магнитное сцепление изменяется в зависимости от времени по синусоиде или косинусоиде. Например, $\Phi = \Phi_m \cos \omega t$ или

$$\Psi = w\Phi = \Psi_m \cos \omega t = \Psi_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

и

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} = \omega w \Phi_m \sin \omega t = E_m \sin \omega t.$$

Наибольшее значение или амплитуда наводимой э. д. с. при этом равняется

$$E_m = \omega w \Phi_m = 2\pi f w \Phi_m = 2\pi f \Psi_m. \quad (2,1)$$

Угол ωt представляет собой так называемый фазовый угол или фазу гармонического изменения, а ω — так называемую угловую частоту. По численному значению $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ представляет собой число периодов в 2π единиц времени.

Если определить для разных моментов времени мгновенные значения магнитного потока (или сцепления) и наводимой им э. д. с., отложить эти значения в прямоугольной системе координат (фиг. 4) и соединить концы ординат огибающей кривой, то получаются две синусоиды, сдвинутые друг относительно друга.

В момент $t = 0$ мы имеем, что $\Phi = \Phi_m$ и $e = 0$. Когда $\alpha = \omega t$ меняется в пределах от $\alpha = 0$ до $\alpha = \omega \frac{T}{4} = 2\pi f \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$, магнитный поток уменьшается, а наводимая э. д. с. нарастает. При прохождении значения магнитного потока через нуль наводимая э. д. с. достигает

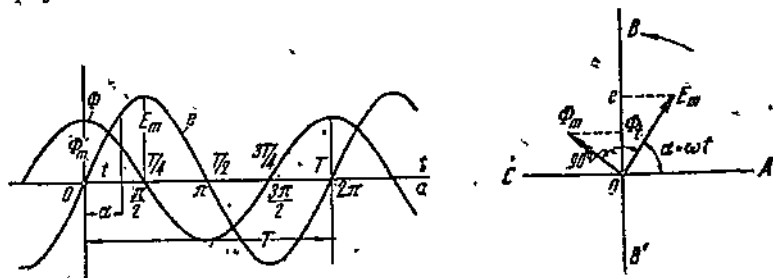
своего максимального значения $e = E_m$. В дальнейшем в интервале времени от $t = \frac{T}{4}$ до $t = \frac{T}{2}$ или от $\alpha = \frac{\pi}{2}$ до $\alpha = \pi$ скорость изменения магнитного потока в противоположном направлении постепенно уменьшается и в связи с этим значения наводимой э. д. с., сохраняя то же направление, уменьшаются; в момент $t = \frac{T}{2}$ магнитный поток достигает своего отрицательного максимума, а наводимая э. д. с. равна нулю. После этого магнитный поток и наводимая э. д. с. изменяются так же, как и за первую половину периода, но только Φ и e получают противоположные по сравнению с первой половиной периода значения.

t	α	Φ	e
0	0	Φ_m	0
t_1	α_1	$\Phi_m \sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \Phi_1$	$E_m \sin \alpha_1 = e_1$
$\frac{1}{4} T$	$\frac{\pi}{2}$	0	E_m
$\frac{1}{2} T$	π	$-\Phi_m$	0
$\frac{1}{2} T + t_1$	$\pi + \alpha_1$	$\Phi_m \sin\left(\pi + \alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\Phi_1$	$E_m \sin(\pi + \alpha_1) = -e_1$
$\frac{3}{4} T$	$\frac{3}{2} \pi$	0	$-E_m$
T	2π	Φ_m	0
$T + t_1$	$2\pi + \alpha_1$	$\Phi_m \sin\left(2\pi + \alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \Phi_1$	$E_m \sin(2\pi + \alpha_1) = e_1$

Если мы сравним одновременные значения магнитного потока и э. д. с., то увидим, что, когда магнитный поток достигает своего максимума, наведенная э. д. с. равна нулю, так как в этот момент магнитный поток для двух бесконечно близких t не меняется и $\frac{d\Phi}{dt} = 0$; когда же магнитный поток меняет свое направление по отношению к витку и проходит через нулевое значение, изменение магнитного потока, отнесенное к единице времени, $\frac{d\Phi}{dt} = \text{max}$, имеет наибольшее значение, и наводимая э. д. с. достигает своего максимума.

Сравнивая одновременные значения магнитного потока и э. д. с., мы находим, что магнитный поток на четверть периода раньше проходит через значения нуля и своего максимума, чем э. д. с., или, другими словами, магнитный поток в своем периодическом колебании опережает э. д. с. на четверть периода, что соответствует разности фазовых углов или разности фаз в $\frac{\pi}{2}$, или 90° .

Гармоническое изменение величин (по закону синуса) гораздо проще и нагляднее может быть изображено при помощи так называемых векторных диаграмм. В этих диаграммах изменяющуюся по закону синуса величину изображают в виде отрезка или вектора, равного в определенном масштабе амплитуде этой величины (например, пусть будет $E_m = m_E \cdot OE_m$), который воображается вращающимся с равномерной угловой скоростью (равной угловой частоте) около некоторого центра, так что угол, который составляется этим вектором с начальной горизонтальной линией OA , будет в любой момент равен фазовому углу $\alpha = \omega t$ (фиг. 4). Масштаб m_E указывает, скольким вольтам соответствует единица длины отрезка OE_m . Проекции этого вектора на линию, перпендикулярную к начальной линии отсчета углов, дадут нам мгновенные



Фиг. 4. Векторная диаграмма магнитного потока и наводимой э. д. с.

значения этой величины (например, $\varepsilon = m_E \cdot OE$) в соответствующие моменты времени. Если вектор OE_m проектируется на отрицательное направление вертикальной оси OB' , то это будет указывать на то, что в данный момент э. д. с. имеет отрицательное значение и действует в сторону, противоположную положительному направлению. Так как кривая магнитного потока должна быть в векторной диаграмме изображена отрезком $O\Phi_m$, т. е. $\Phi_m = m_\Phi \cdot O\Phi_m$, который с вектором э. д. с. составляет угол в 90° , откладываемый в сторону опережения, т. е. в сторону вращения векторов.

Векторы, применяемые для графического представления переменных токов, отличаются от векторов, применяемых в механике, электростатике, электродинамике и т. д. Там векторы изображают физические величины, имеющие в пространстве определенное направление, здесь — это так называемые радиусы-векторы, вращающиеся на чертеже с определенной угловой скоростью и служащие лишь для геометрического нахождения мгновенных значений, гармонически изменяющихся переменных величин. Правильнее было бы для таких „векторов“ ввести какое-нибудь другое название, например, слово „верзор“ или „ротатор“.

3. Вспомогательные теоремы

1. Сумма ординат двух синусов одинакового периода дает ординату синусов того же периода.

Пусть даны две синусоиды

$$a_1 = A_1 \sin(\omega t - \varphi_1) \text{ и } a_2 = A_2 \sin(\omega t - \varphi_2).$$

Так как в момент $t = 0$ ординаты a_1 и a_2 не равны нулю, а обращаются в нуль лишь по истечении времени, когда $\omega t - \varphi_1 = 0$ для первой и когда $\omega t - \varphi_2 = 0$ для второй синусоиды, то в линейной диаграмме начала синусоид находятся вправо от начала отсчета времени на расстояниях $t_1 = \frac{\varphi_1}{\omega}$ и $t_2 = \frac{\varphi_2}{\omega}$, или, если по оси абсцисс откладывать углы, то на расстояниях φ_1 и φ_2 (фиг. 5). Сумма ординат двух синусоид может быть выражена через

$$a_1 + a_2 = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \cos \omega t.$$

Заменяя постоянные выражения в скобках через

$$A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = A \cos \varphi,$$

$$A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 = A \sin \varphi,$$

мы находим, что эта сумма

$$a_1 + a_2 = A \cos \varphi \sin \omega t + A \sin \varphi \cos \omega t = A \sin (\omega t - \varphi)$$

может быть представлена ординатой синусоиды того же периода, амплитуда которой равна

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)} = \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned} \quad (3,1)$$

а фазовый угол φ определяется через тангенс

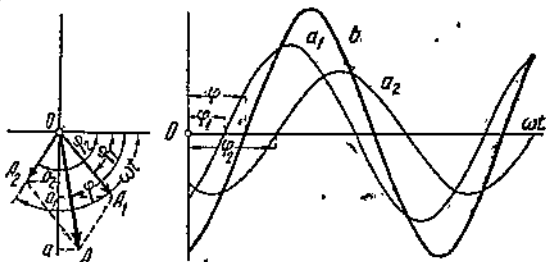
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A \sin \varphi}{A \cos \varphi} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (3,2)$$

Если мы обратимся к векторной диаграмме и сложим векторы $\overline{OA_1}$ и $\overline{OA_2}$ геометрически по правилу параллелограмма, то проекция равнодействующей $\overline{OA}$ на вертикальную ось, равная

$$\begin{aligned} Oa &= OA \cos [90^\circ - (\omega t - \varphi)] = \\ &= OA \sin (\omega t - \varphi) = \overline{OA_1} + a_1 a = \\ &= OA_1 + OA_2 = OA_1 \sin (\omega t - \varphi_1) + \\ &\quad + OA_2 \sin (\omega t - \varphi_2) \end{aligned}$$

и умноженная на масштаб m_A

$$\begin{aligned} m_A \cdot Oa &= A_1 \sin (\omega t - \varphi_1) + \\ &+ A_2 \sin (\omega t - \varphi_2) = (a_1 + a_2), \end{aligned}$$



Фиг. 5. Сложение ординат двух синусоид.

будет как раз равняться сумме мгновенных значений a_1 и a_2 в рассматриваемый момент t . Так как это соотношение имеет место для любого момента времени, то отсюда следует, что синусоида, получающаяся от сложения ординат двух синусоид одного периода, может быть представлена вектором, определяемым по величине и фазе, как геометрическая сумма векторов слагаемых синусоид $\overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2}$.

Обобщая полученный результат, мы можем сказать, что вектор суммы ординат нескольких синусоид одного и того же периода по величине и направлению равен замыкающей стороне многоугольника, который получается, если у конца вектора первой синусоиды провести линию, равную и параллельную вектору второй слагающей, и от полученной таким образом точки провести линию, равную и параллельную вектору третьей синусоиды и т. д. (фиг. 6).

В случае если из $a_1 = A_1 \sin(\omega t - \varphi_1)$ требуется вычесть $a_2 = A_2 \sin(\omega t - \varphi_2)$, то мы искомую разность этих двух величин можем рассматривать как сумму первой величины и второй величины, взятой с обратным знаком.

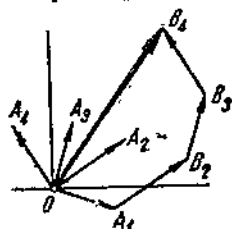
$$a_1 - a_2 = A_1 \sin(\omega t - \varphi_1) - A_2 \sin(\omega t - \varphi_2) = A_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t - \varphi_2 + \pi) = A' \sin(\omega t - \varphi'),$$

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (3,3)$$

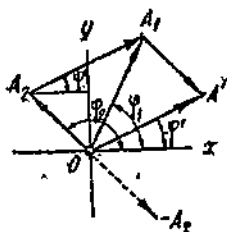
$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{A_1 \sin \varphi_1 - A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 - A_2 \cos \varphi_2}. \quad (3,4)$$

Переменить знак у какой-нибудь синусоидальной функции — значит изменить ее фазу на 180° , в векторной же диаграмме это будет соответствовать повороту вектора на 180° .

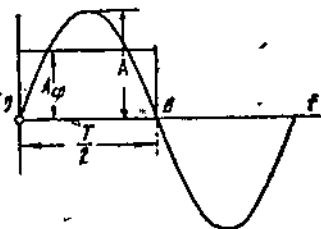
Поэтому, если у конца A_1 первого вектора $\overline{OA_1}$ построить отрезок, равный по величине, но обратный по направлению вектору $\overline{OA_2}$ второй синусоиды $\overline{A_1A'} = -\overline{OA_2} = \overline{A_2A_1}$, то замыкающая линия $\overline{OA'}$ представит собой по величине и фазе вектор искомой разности (фиг. 7). Разность двух векторов может быть определена простым соединением концов этих векторов; вектор, представляющий разность, направлен от конца вычитаемого вектора $\overline{OA_2}$ к концу вектора $\overline{OA_1}$, из которого вычитается другой $\overline{OA_1} - \overline{OA_2} = \overline{OA'} = \overline{A_2A_1}$.



Фиг. 6. Сложение нескольких векторов.



Фиг. 7. Векторная диаграмма разности двух синусоид.



Фиг. 8. Среднее значение ординат синусоиды.

Подобно тому как в механике всякая сила может быть разложена на составляющие, мы всякий вектор, изображающий какую-либо синусоиду, можем разложить геометрически на несколько векторов, которые по величине и направлению вполне определяют те отдельные синусоиды, на которые этим самым разлагается синусоида, определяемая заданным вектором.

II. Среднее (медиальное) значение положительных ординат синусоиды за время полупериода равно $\frac{2}{\pi} = 0,637$ амплитуды.

Среднее значение положительных ординат синусоиды за время полупериода, в течение которого ординаты будут иметь одно и то же направление (фиг. 8), определяется как высота прямоугольника с основанием OB , соответствующим $\frac{T}{2}$, и с площадью, равной площади, ограниченной половиной синусоиды и осью абсцисс. Эта площадь, умноженная на масштабы времени и изменяющейся величины, выражается через

$$\int_0^{\frac{T}{2}} a \, dt = \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin \omega t \, dt = \frac{A}{\omega} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \, d(\omega t) = \left. \frac{TA}{2\pi} \cos \frac{2\pi t}{T} \right|_0^{\frac{T}{2}} =$$

$$= -\frac{TA}{2\pi} (-1 - 1) = \frac{TA}{\pi},$$

средняя же ордината (умноженная на масштаб) будет равна

$$A_{med} = \frac{\int_0^{\frac{T}{2}} a \, dt}{\frac{T}{2}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} A. \quad (3.5)$$

Среднее значение ординат синусоиды за целый период равно нулю.

III. Произведение ординат двух синусоид одинакового периода равняется ординате синусоиды с двойным числом периодов с амплитудой, равной полупроизведению амплитуд данных синусоид, и с осью симметрии, сдвинутой относительно оси абсцисс на величину, равную полупроизведению амплитуд, умноженному на косинус угла сдвига фаз заданных синусоид.

Пользуясь тригонометрическим соотношением

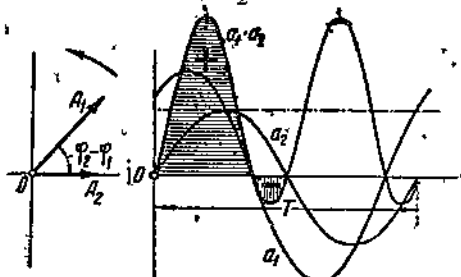
$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta),$$

мы можем представить произведение двух синусоид

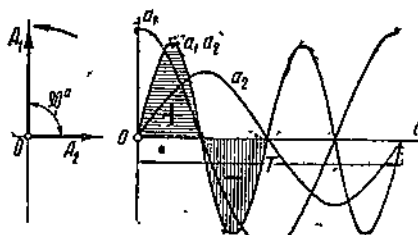
$$a_1 = A_1 \sin (\omega t - \varphi_1) \quad \text{и} \quad a_2 = A_2 \sin (\omega t - \varphi_2)$$

в виде

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= A_1 A_2 \sin (\omega t - \varphi_1) \sin (\omega t - \varphi_2) = \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} \cos (\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{A_1 A_2}{2} \cos [2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (3.6)$$



Фиг. 9. Произведение ординат двух синусоид в случае $\varphi_1 - \varphi_2 \neq 90^\circ$.



Фиг. 10. Произведение ординат двух синусоид в случае $\varphi_1 - \varphi_2 = 90^\circ$.

Это произведение состоит из постоянной величины $\frac{A_1 A_2}{2} \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$, где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — сдвиг фаз между синусоидами и из ординаты косинусоиды (или синусоиды со смещенным началом), изменяющейся с двойной частотой ($2\omega = 2\pi \cdot 2f$) и амплитуда которой равна $\frac{A_1 A_2}{2}$.

Если φ_1 не равно φ_2 , то искомая синусоида за время одного периода четыре раза пересекает ось абсцисс в тех точках, для которых a_1 или a_2 равны нулю (фиг. 9). Положительные значения произведения будут чередоваться с отрицательными.

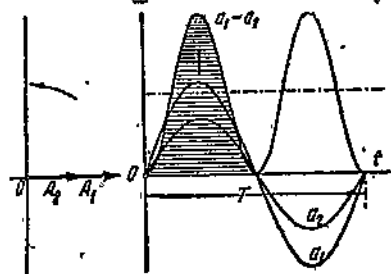
IV. Среднее значение произведений ординат двух синусоид равно полупроизведению амплитуд, умноженному на косинус угла сдвига между синусоидами.

Среднее значение произведений ординат равно расстоянию средней линии синусоиды, представляющей эти произведения, от оси абсцисс; поэтому мы можем написать

$$\frac{1}{T} \int_0^T A_1 \sin (\omega t - \varphi_1) \cdot A_2 \sin (\omega t - \varphi_2) \, dt = \frac{A_1 A_2}{2} \cos (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.7)$$

В частном случае, когда синусоиды сдвинуты одна относительно другой на четверть периода, что соответствует разности фаз в 90° (фиг. 10), ось иско-
мой синусоиды совпадает с осью абсцисс, так как $\frac{A_1 A_2}{2} \times \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$
и среднее значение произведений ординат равно нулю.

Когда фазы обеих синусоид совпадают, $\varphi_1 = \varphi_2$ (фиг. 11), то одновременно
будут меняться знаки у a_1 и a_2 и произведения будут всегда положительными.
Синусоида, представляющая произведения ординат



$$a_1 a_2 = \frac{A_1 A_2}{2} - \frac{A_1 A_2}{2} \cos 2\omega t,$$

касается оси абсцисс, и среднее значение, равное расстоянию ее средней линии от оси абсцисс будет равно

$$\frac{A_1 A_2}{2}. \quad (3,8)$$

Фиг. 11. Произведение ординат двух синусоид в случае $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$.

V. Среднее значение квадратов ординат синусоиды за период (или полупериод) равно половине квадрата амплитуды.

Полагая, что перемножаемые синусоиды имеют одинаковые амплитуды и фазы, $A_1 = A_2 = A$, $\varphi_1 = \varphi_2$, мы на основании предыдущего получаем, что среднее значение квадратов ординат синусоиды должно равняться $\frac{A^2}{2}$.

Это соотношение можно было бы получить и непосредственно:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{A^2 \sin^2 \omega t \, dt}{T} &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \frac{(1 - \cos 2\omega t) \, dt}{2} = \\ &= \frac{A^2}{2T} \int_0^T dt - \frac{A^2}{2T \cdot 2\omega} \int_0^{2\omega T} \cos 2\omega t \, d(2\omega t) = \\ &= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{4\omega T} \left[\sin \frac{2 \cdot 2\pi}{T} t \right]_0^T = \frac{A^2}{2}. \end{aligned} \quad (3,9)$$

Среднее значение квадратов ординат синусоид не зависит от частоты.

4. Эффективные и средние значения тока и напряжения

Если в цепи действует э. д. с., меняющаяся периодически по величине и направлению, то получающийся в цепи ток будет также меняться как по величине, так и по направлению.

Электрический ток мы определяем как величину электрического заряда, протекающего через сечение проводника в единицу времени. При переменном токе, когда через равные промежутки времени изменяется направление тока, общая величина заряда, протекающего через проводник, в течение каждого полного периода равна нулю. Но если ограничиться бесконечно малым промежутком времени dt и если за это время через сечение проводника протекает заряд dq , то отношение $\frac{dq}{dt}$ дает мгновенное значение тока.

При синусоидальном изменении э. д. с. ток меняется также, по закону синуса:

$$i = I_m \sin \omega t. \quad (4,1)$$

Амплитуда I_m и угловая частота $\omega = 2\pi f$, вполне характеризуют ток в любой момент. Однако как амплитуда, так и мгновенные значения тока поддаются измерению лишь при помощи весьма сложных приспособлений. Все измерительные приборы, которые могут быть применены для измерения переменных токов, дают нам не амплитуду и не среднее значение за время полупериода, а так называемое эффективное значение. Поэтому принято переменный ток измерять его эффективным значением, равным значению такого эквивалентного постоянного тока, который, проходя через то же сопротивление, что и переменный ток, в каждую единицу времени выделяет такое же количество энергии.

Энергия, поглощаемая в сопротивлении r за промежуток времени dt , равняется $ri^2 dt$. Так как каждый период повторяет явления предыдущего, то мы можем ограничиться рассмотрением одного периода. За время одного периода поглощенная энергия составит

$$\int_0^T ri^2 dt = r \int_0^T i^2 dt.$$

Эквивалентный постоянный ток, который обозначим через I , за тот же промежуток времени и в том же сопротивлении r поглощает энергию $I^2 r T$. Приравнявая оба выражения поглощенной энергии,

$$r \int_0^T i^2 dt = I^2 r T,$$

и сокращая на r , мы получаем, что величина эквивалентного постоянного тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{(i^2)_{med}} \quad (4,2)$$

представляет собой корень квадратный из среднего значения квадратов мгновенных значений переменного тока за время одного периода или любого числа полупериодов.

Если ток изменяется по закону синуса, $i = I_m \sin \omega t$, то среднее значение квадратов тока равняется половине квадрата амплитуды $\frac{I_m^2}{2}$ (см. теорему V предыдущего параграфа), откуда следует, что эффективное значение синусоидального тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (4,3)$$

равняется амплитуде (или максимальному значению) тока, деленной на $\sqrt{2}$.

Равным образом и переменная э. д. с. измеряется своим эффективным значением, которое точно так же определяется, как корень квадратный из среднего значения квадратов мгновенных значений э. д. с.

$$E_{\text{эф}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}.$$

При синусоидальном изменении э. д. с., $e = E_m \sin \omega t$, эффективное значение э. д. с. равно амплитуде, деленной на $\sqrt{2}$:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (4,4)$$

В технике переменных токов под значением токов, э. д. с. и напряжений подразумевают всегда эффективные значения этих величин. В дальнейшем мы будем обозначать их большими буквами. Мгновенные значения будем обозначать маленькими буквами, а амплитуды — большими буквами с индексом m внизу.

Среднее арифметическое значение приходится определять, главным образом, для э. д. с., так как оно находится в простом соотношении с величиной максимального значения магнитного потока, наводящего эту э. д. с. Так как $e = E_m \sin \omega t = -w \frac{d\Phi}{dt}$, то среднее значение э. д. с. за время полупериода, в течение которого она имеет одно и то же направление, будет равно

$$\begin{aligned} E_{\text{med}} &= \frac{\int_0^{\frac{T}{2}} e dt}{\frac{T}{2}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} -w \frac{d\Phi}{dt} dt = -2fw \int_0^{\frac{T}{2}} d\Phi = \\ &= 2fw \left[+\Phi_{t=\frac{T}{2}} - \Phi_{t=0} \right]. \end{aligned}$$

Меняющийся в зависимости от времени магнитный поток имеет максимум или минимум тогда, когда первая производная его по времени равна нулю, а это как раз соответствует моментам времени $t = 0$ и $t = \frac{T}{2}$, когда и э. д. с. равна нулю.

Из фиг. 4 видно, что $\Phi_{t=0} = +\Phi_m$ и $\Phi_{t=\frac{T}{2}} = -\Phi_m$, и поэтому

$$E_{\text{med}} = 4fw \Phi_m. \quad (4,5)$$

Это соотношение между средним значением э. д. с. и максимальным значением магнитного потока имеет место во всех случаях, когда

магнитный поток в катушке меняется между равными, но противоположными по направлению пределами и кривая изменения магнитного потока не имеет седлообразной формы.

Отношение эффективного значения к среднему арифметическому называется коэффициентом, формы кривой. Для синусоидальной э. д. с.

$$k = \frac{E}{E_{med}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} : \frac{2E_m}{\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11, \quad (4,6)$$

и отсюда

$$E = E_{med} k = 4,44 f w \Phi_m = 4,44 f w \Phi_m, \quad (4,7)$$

Задача 2. Определить значение амплитуды магнитной индукции в железном сердечнике трансформатора, если э. д. с., наводимая в обмотке трансформатора, имеющего $w = 2500$ витков, равна 6300 V. Сечение сердечника $S = 100$ см²; частота $f = 50$ Hz.

Решение.

$$\Phi_m = SB_m = \frac{E}{4,44 f w} = \frac{6300}{4,44 \cdot 50 \cdot 2500} \text{ V sec} = 0,0113 \text{ V sec};$$

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S} = \frac{11,3 \cdot 10^{-3}}{100} \frac{\text{V sec}}{\text{cm}^2} = 11,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{V sec}}{\text{cm}^2} = 11300 \text{ G.}$$

5. Составные элементы цепи переменного тока

В электрических цепях прохождение электрического тока сопровождается образованием магнитного поля как вокруг проводника, так и в самом проводнике. Вследствие этого при прохождении переменного тока через проводник под влиянием магнитного поля, образующегося внутри проводника, особенно при больших сечениях проводников и больших частотах, плотность тока неодинакова в разных точках сечения и в результате увеличиваются падение напряжения и потери на джоулево тепло. Если разделить потери мощности в каком-нибудь проводнике с большим сечением на квадрат эффективного значения переменного тока, то получаются значения сопротивления большие, чем значения сопротивления при постоянном токе, определяемые по закону Ома, т. е. по формуле $r = \frac{l}{S} \rho$.

Поэтому при разборе явлений в цепях переменного тока оперируют не с „омическими“ сопротивлениями, а с так называемыми активными сопротивлениями, которые для данной частоты определяются как отношение поглощаемой в сопротивлении мощности к квадрату эффективного значения тока. При малых частотах и небольших сечениях разница между значениями активного и „омического“ сопротивлений делается незаметной.

При переменном токе в проводах кроме активного падения напряжения мы будем иметь явление наведения в этих проводах индуктивных э. д. с. от собственного магнитного поля. Эти э. д. с. могут быть равномерно распределены по всей длине провода, что, например, имеет место в катушках, в которых активное сопротивление и индуктивность распределяются по всей обмотке.

Когда через все части цепи проходит один и тот же ток, величина тока не изменится, если сопротивление и индуктивность отделить друг от друга, т. е. если рассматриваемую катушку, имеющую сопротивление и индуктивность, заменить двумя элементами, из которых один имеет лишь активное сопротивление (например, если провод этого сопротивления сложен вдвое и расположен таким образом, что в двух рядом лежащих частях токи направлены в противоположные стороны, так что магнитное поле одной части компенсируется противоположным магнитным полем другой части), а другой элемент представляет собой лишь индуктивность без активного сопротивления, т. е. катушку, выполненную как бы из сверхпроводящего материала. Такое разделение возможно лишь при низких частотах, когда во всех частях цепи ток имеет одно и то же значение.

При больших частотах и очень протяженных проводниках значения тока в разных частях цепи могут быть и неодинаковы, что обуславливается емкостными токами и токами утечки.

Особенно резко это явление сказывается в длинных линиях, вследствие того что электромагнитные процессы распространяются не мгновенно, а с определенной скоростью (скорость распространения электромагнитных процессов равна скорости света, в вакууме она равна $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$).

В дальнейшем мы рассмотрим явления и в длинных линиях с распределенными по всей длине сопротивлением, индуктивностью и емкостью, в ближайших же главах мы будем рассматривать лишь такие цепи, которые состоят из раздельных элементов сопротивления, индуктивности и емкости, сосредоточенных каждый в одном месте и не влияющих друг на друга своими полями. В таких цепях можно считать, что в любой момент ток во всех частях неразветвленной цепи имеет одно и то же значение.

Для большей наглядности рассмотрим в отдельности соотношения между напряжением и током для каждого из вышеуказанных элементов в отдельности.

6. Сопротивление в цепи переменного тока

При прохождении переменного тока через (активное) сопротивление, (фиг. 12), около которого не образуется магнитного потока и которое не обладает поэтому индуктивностью, между током и напряжением у зажимов этого сопротивления в любой момент имеет место следующее соотношение:

$$i = \frac{u}{r}, \text{ или } u = ri. \quad (6,1)$$

Если ток изменяется по закону синуса: $i = I_m \sin \omega t$, то и напряжение будет меняться по такому же закону:

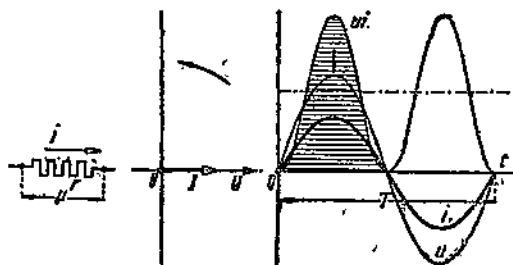
$$u = ri = rI_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t. \quad (6,2)$$

Ток и напряжение имеют постоянно одну и ту же фазу и могут быть представлены или двумя синусоидами с совпадающими начальными

точками или двумя совпадающими по направлению векторами (фиг. 12). Так как амплитуды и эффективные значения отличаются лишь множителем $\sqrt{2}$, то безразлично, что откладывать на векторной диаграмме — амплитуды или эффективные значения; они могут быть представлены одним и тем же вектором, но в разных масштабах.

Амплитуда тока равняется амплитуде напряжения, деленной на сопротивление. В таком же соотношении находятся эффективные значения этих величин:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2r}} = \frac{U}{r}. \quad (6,3)$$



Фиг. 12. Векторная диаграмма и кривые напряжения, тока и мощности при прохождении переменного тока через сопротивление.

Мощность переменного тока является величиной, периодически меняющейся. Если в момент t через сопротивление r проходит ток i и если в этот момент напряжение на концах сопротивления равно u , то мощность в этот момент (представляющая собой работу, отнесенную к единице времени), или так называемая мгновенная мощность, выразится через

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t). \quad (6,4)$$

Мгновенная мощность, оставаясь все время положительной, меняется в пределах от нуля до $U_m I_m$, совершая в течение одного периода переменного тока два полных цикла (фиг. 12).

Если говорят про мощность переменного тока, то под этим всегда подразумевают среднюю мощность, которая для любого периода при установившемся режиме есть величина неизменная. Средняя мощность, или, просто, мощность переменного тока, проходящего через активное сопротивление, равна полупроизведению амплитуд (см. § 3, теорему III) напряжения и тока.

Заменяя амплитуды эффективными значениями, мы получаем, что

$$P = \frac{\int_0^T ui \, dt}{T} = \frac{U_m I_m}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = UI, \quad (6,5)$$

т. е. если в цепи имеется только активное сопротивление, то мощность переменного тока равна произведению эффективных значений напряжения и тока или просто произведению напряжения и тока.

7. Индуктивность в цепи переменного тока

Предположим, что нам дана индуктивная катушка с постоянной индуктивностью L и с сопротивлением $r = 0$.

Индуктивность катушки только тогда представляет собой постоянную величину, когда магнитный поток пропорционален току, как, например, в катушках, не содержащих железа.

При прохождении через катушку переменного тока $i = I_m \sin \omega t$ в катушке создается переменный по величине и направлению магнитный поток (или поток сцепления).

$$\Phi = \frac{L}{w} I_m \sin \omega t = \Phi_m \sin \omega t,$$

который в любой момент совпадает по фазе с током и который поэтому в линейной диаграмме представляется синусоидой, отличающейся от синусоиды тока только масштабом, а в векторной диаграмме — вектором, имеющим то же направление, что и вектор тока. Изменение тока в катушке за время dt на величину di будет сопровождаться наведением э. д. с. изменившимся магнитным потоком:

$$e_L = -w \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (7,1)$$

Наведенная э. д. с. по фазе отстает от тока на четверть периода или на угол $\frac{\pi}{2}$. Поэтому в линейной диаграмме синусоида индуктированной э. д. с. сдвинута вправо на четверть периода, а в векторной диаграмме (фиг. 13) соответствующий вектор $\overline{OE}$ повернут по отношению к вектору тока на 90° в сторону, обратную движению векторов. Так как индуктивная э. д. с. имеет всегда такое направление, что она препятствует всякому изменению тока, то, для того чтобы через индуктивную катушку проходил переменный ток $i = I_m \sin \omega t$, к зажимам индуктивной катушки должно быть приложено напряжение u , которое в любой момент должно быть равно и противоположно индуктивной э. д. с.:

$$\begin{aligned} u = -e_L &= -\left(-L \frac{di}{dt}\right) = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \omega L I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (7,2)$$

Таким образом напряжение у зажимов представляется синусоидой или вектором, которые равнопротивоположны синусоиде или вектору индуктивной э. д. с. Другими словами, при одной только индуктивности в цепи вектор напряжения опережает вектор тока на 90° :

$$u = \omega L I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

и величина амплитуды напряжения равна $U_m = \omega L I_m$. (7,3)

Из сказанного вытекает, что если у зажимов индуктивной катушки, сопротивление которой равно нулю, действует синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t$, то ток будет изменяться также по синусоиде.

$$i = I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{U_m}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (7,4)$$

вектор которой будет отставать от вектора напряжения на 90° или на четверть периода. Амплитуда тока равна

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L} = \frac{U_m}{2\pi f L} \quad (7,5)$$

Она прямо пропорциональна амплитуде напряжения и обратно пропорциональна индуктивности и частоте. В таком же соотношении находятся эффективные значения тока и напряжения:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2} \omega L} = \frac{U}{\omega L}$$

Из этого соотношения следует, что величина ωL должна измеряться в таких же единицах, как и сопротивление, т. е. в омах. Величину ωL мы будем называть реактивным сопротивлением индуктивности или реактансом индуктивности и обозначать через x_L :

$$x_L = \omega L. \quad (7,6)$$

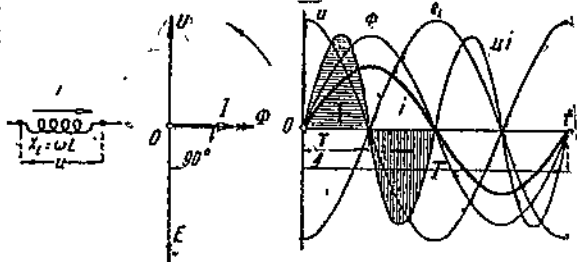
Индуктивное сопротивление не представляет собой постоянной величины, оно увеличивается пропорционально частоте переменного тока.

Мгновенная мощность переменного тока в индуктивной катушке

$$p = ui = U_m \sin \omega t I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{U_m I_m}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{U_m I_m}{2} \cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (7,7)$$

представляется синусоидной с двойным числом периодов, ось симметрии которой совпадает с осью абсцисс. Как видно из фиг. 13, промежутки времени, в течение которых энергия извне сообщается индукционной катушке, чередуются с такими же промежутками, когда эта энергия возвращается обратно. В момент, когда ток равен нулю, магнитное поле и накопленная в поле энергия отсутствуют. По мере возрастания тока увеличивается энергия магнитного поля, которая ввиду отсутствия потерь ($r=0$) должна равняться энергии, получаемой извне. За четверть периода, когда ток от нуля возрастает до своей максимальной величины, накопленная энергия будет равна

$$\int_{i=0}^{i=\frac{T}{4}} ui dt = \int_{i=0}^{i=\frac{T}{4}} L \frac{di}{dt} i dt = \left| \frac{Li^2}{2} \right|_0^{\frac{T}{4}} = \frac{LI_m^2}{2}.$$



Фиг. 13. Векторная диаграмма и кривые напряжения, тока и мощности при прохождении переменного тока через индуктивную катушку (индуктивность).

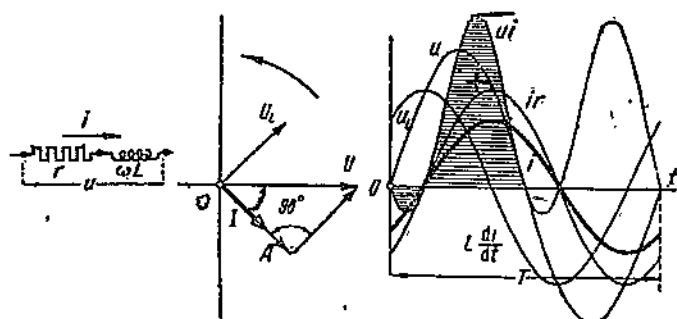
В следующую четверть периода ток уменьшается от I_m до 0, и одновременно накопленная перед этим энергия постепенно освобождается и возвращается в сеть, пока (при $i=0$) она не будет возвращена полностью.

В дальнейшем ток изменит свое направление, и процессы намагничивания с накоплением энергии и размагничивания с отдачей энергии будут чередоваться каждую четверть периода.

Так как в катушке отсутствуют потери, то происходит лишь периодический переход энергии извне к катушке и обратно, т. е. средняя мощность равна нулю:

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{2} = UI \cos 90^\circ = 0. \quad (7,8)$$

Когда цепь состоит из сопротивления r и индуктивности L (фиг. 14), то при прохождении синусоидального тока $i = I_m \sin \omega t$ напряжение на



Фиг. 14. Векторная диаграмма и кривые напряжений и тока при прохождении переменного тока через последовательно соединенное активное сопротивление и индуктивность.

концах цепи в любой момент складывается из двух величин — из так называемого активного падения напряжения, совпадающего по фазе с током;

$$u_a = r i = r I_m \sin \omega t$$

и из слагающей, уравнивающей э. д. с. индуктивности:

$$u_L = -e_L = -\left(-L \frac{di}{dt}\right) = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

опережающей ток на четверть периода или на фазовый угол в 90° :

$$u = u_a + u_L = r i + L \frac{di}{dt} = r I_m \sin \omega t + \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (7,9)$$

Вектор $\overline{OA}$ первой слагающей $r I_m = m_U \cdot OA$ совпадает по направлению с вектором тока, вектор же $\overline{OU_L}$ второй слагающей $\omega L I_m = x_L I_m = m_U \cdot \overline{OU_L} = m_U \cdot AU$ опережает вектор тока на 90° . Коэффициент m_U указывает, скольким вольтам равняется единица длины отрезков, представляющих напряжение в векторной диаграмме.

Геометрическая сумма $\overline{OU}$ этих двух векторов по величине и направлению определяет напряжение, которое должно действовать в цепи. Амплитуда этого напряжения соответствует гипотенузе OU :

$$m_U \cdot OU = U_m = \sqrt{(rI_m)^2 + (\omega L I_m)^2} = I_m \sqrt{r^2 + (\omega L)^2},$$

а по фазе напряжение опережает ток на угол φ , тангенс которого может быть определен из чертежа:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AU}{OA} = \frac{\omega L}{r} = \frac{x_L}{r}. \quad (7,10)$$

Таким образом при токе $i = I_m \sin \omega t$ напряжение должно равняться

$$u = I_m \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \varphi) = U_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (7,11)$$

и отношение между амплитудами напряжения и тока получается равным

$$\frac{U_m}{I_m} = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = z. \quad (7,12)$$

Выше мы задавались током и определяли напряжение. Если же нам дается напряжение, действующее в цепи, $u = U_m \sin \omega t$, то ток будет меняться следующим образом:

$$i = \frac{U_m \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

ток будет по фазе отставать от напряжения на угол φ ; эффективное значение тока будет равно

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} = \frac{U}{z}. \quad (7,13)$$

Благодаря индуктивности происходит уменьшение тока. Эффективное значение тока не равняется эффективному значению напряжения, деленному на активное сопротивление $\frac{U}{r}$, что имело бы место при отсутствии индуктивности, а равно напряжению, деленному на $\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}$. Благодаря индуктивности происходит как бы увеличение сопротивления цепи, и кроме того, ток отстает по фазе от напряжения на угол $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{r}$.

Выражение

$$\sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = z \quad (7,14)$$

называется полн, им, или кажущимся, сопротивлением или импедансом цепи (Impedanz)! Оно измеряется в омах и определяется как гипотенуза прямоугольного треугольника, построенного на катетах r и $\omega L = x_L$. Величина, обратная полному сопротивлению,

$$y = \frac{1}{z}, \quad (7,15)$$

представляет собой полную проводимость цепи (Admittanz). Если эффек-

тивное значение напряжения умножить на полную проводимость, то получаем непосредственно эффективное значение тока

$$I = \frac{U}{z} = Uy. \quad (7,16)$$

* Так как эффективные значения находятся в определенном отношении к амплитудам ($1 : \sqrt{2}$), то во всех векторных диаграммах вместо амплитуд для напряжения и тока могут быть отложены их эффективные значения.

Взаимное расположение векторов напряжений и тока при заданном напряжении может быть найдено следующим образом: строим прямоугольный треугольник полного сопротивления, откладывая в некотором масштабе $r = m_z \cdot Oa$, и перпендикулярно к нему в сторону вращения векторов $\omega L = x_L = m_z \cdot ab$ (фиг. 15). Затем на направлении гипотенузы Ob откладываем напряжение $U = m_U \cdot OU$ и проводим на OU как на диаметре окружность. Продолжая Oa , получаем две слагающих, из которых первая $U_a = rI = m_U \cdot OA$ совпадает по фазе с током и представляет собой активное падение напряжения или активную слагающую напряжения, а вторая $U_2 = \omega LI = m_U \cdot AU$, опережающая ток на 90° , уравнивает э. д. с. индуктивности и представляет собой так называемую реактивную слагающую напряжения. Угол UOA изменяет сдвиг фаз между напряжением и током.

Фиг. 15. Векторная диаграмма. Нахождение тока при заданном напряжении.

Мгновенная мощность цепи, состоящей из активного сопротивления и индуктивности, выражается через

$$p = ui = U_m \sin \omega t I_m \sin (\omega t - \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi - \frac{U_m I_m}{2} \cos (2\omega t - \varphi). \quad (7,17)$$

Между током и напряжением существует сдвиг фаз, и промежутки времени, когда u и i имеют одно и то же направление, чередуются с промежутками, когда u и i имеют разные направления; в первом случае получается энергия извне (мгновенная мощность положительна), во втором — она возвращается обратно (мгновенная мощность отрицательна). Так как в цепи имеется активное сопротивление, поглощающее энергию, то получаемая энергия должна быть больше отдаваемой.

Среднее же значение мощности, или просто мощность переменного тока (см. § 3, теорему III), определится через

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos \varphi = UI \cos \varphi, \quad (7,18)$$

оно не равно произведению (эффективных значений) напряжения и тока, а равно произведению напряжения и тока, умноженному на косинус угла сдвига между напряжением и током.

Отношение между средней мощностью переменного тока и произведением (эффективных значений) напряжения и тока называют коэффици-

ентом мощности. При синусоидальном изменении напряжения и тока он измеряется косинусом угла сдвига между ними:

$$\frac{P}{UI} = \cos \varphi. \quad (7,19)$$

Так как энергия поглощается только в активном сопротивлении, то мощность переменного тока должна равняться джоулеву теплу, поглощаемому этим сопротивлением в единицу времени:

$$P = UI \cos \varphi = U \cos \varphi I = r I^2. \quad (7,20)$$

Она равна произведению активной слагающей напряжения (проекции вектора напряжения на направление вектора тока) $U_a = U \cos \varphi = r I$ на ток. Эту мощность, фактически потребляемую в цепи

$$P = P_a = U_a I = UI \cos \varphi,$$

называют активной мощностью переменного тока в отличие от так называемой реактивной мощности. Последняя представляет собой произведение реактивной слагающей напряжения (проекции вектора напряжения на направление, перпендикулярное к направлению вектора тока) на ток:

$$P_r = U \sin \varphi I = U_r I. \quad (7,21)$$

Реактивная мощность, которая обозначается через P с индексом r , является фиктивной величиной, так как индуктивность энергии не поглощает и средняя мощность в индуктивности равна нулю; совокупность активной и реактивной мощностей дает полную характеристику потребителя энергии.

Корень квадратный из квадратов активной и реактивной мощности

$$P_i = \sqrt{P_a^2 + P_r^2} = \sqrt{U^2 I^2 \cos^2 \varphi + U^2 I^2 \sin^2 \varphi} = UI \quad (7,22)$$

равен произведению напряжения на ток. Это произведение, обозначаемое через P с индексом i , называется кажущейся мощностью. Оно определяет ту номинальную мощность, на которую должны быть рассчитаны отдельные элементы системы, например, трансформаторы.

Задача 3. Катушка с сопротивлением $r = 2 \Omega$ и индуктивностью $L = 0,02$ Н присоединена к переменному напряжению, эффективное значение которого равно $U = 120$ В. Определить полное сопротивление катушки, эффективное значение тока, поглощаемую мощность и $\cos \varphi$: а) для частоты напряжения $f_1 = 50$ Гц, б) для частоты $f_2 = 100$ Гц.

Решение. а) Реактивное сопротивление равно

$$x_L = 2\pi f_1 L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,02 \Omega = 6,28 \Omega;$$

полное сопротивление

$$z = \sqrt{r^2 + x_L^2} = \sqrt{2^2 + 6,28^2} \Omega = 6,6 \Omega;$$

ток равен

$$I = \frac{U}{z} = \frac{120}{6,6} \text{ A} = 18,18 \text{ A};$$

активная мощность

$$P_a = r I^2 = 2 \cdot 18,18^2 \text{ W} = 665 \text{ W};$$

кажущаяся мощность

$$P_i = UI = 120 \cdot 18,18 \text{ VA} = 2180 \text{ VA}; \quad \cos \varphi = \frac{P_a}{P_i} = \frac{665}{2180} = 0,305; \quad \varphi = 72^\circ 15';$$

б) если частота равна $f_2 = 100 \text{ Hz}$, то

$$x_L = 12,56 \, \Omega; \quad z = 12,7 \, \Omega; \quad I = 9,45 \text{ A}; \quad P_a = 178 \text{ W}; \quad P_i = 1130 \text{ VA}; \\ \cos \varphi = 0,157; \quad \varphi = 81^\circ.$$

Задача 4. Определить сопротивление и индуктивность катушки, которая при напряжении $U = 110 \text{ V}$ и токе $I = 10 \text{ A}$ поглощает мощность $P_a = 400 \text{ W}$, число периодов переменного тока $f = 50 \text{ Hz}$.

Решение. Полное сопротивление катушки равно

$$z = \frac{U}{I} = \sqrt{r^2 + x_L^2} = \frac{110}{10} \, \Omega = 11 \, \Omega;$$

активное сопротивление

$$r = \frac{P_a}{I^2} = \frac{400}{10^2} \, \Omega = 4 \, \Omega;$$

реактивное сопротивление

$$x_L = \omega L = \sqrt{z^2 - r^2} = \sqrt{11^2 - 4^2} \, \Omega = 10,2 \, \Omega;$$

индуктивность

$$L = \frac{x_L}{\omega} = \frac{10,2}{2 \cdot \pi \cdot 50} \text{ H} = 0,0325 \text{ H}.$$

8. Емкость в цепи переменного тока

В то время как емкость в цепи постоянного тока при установившемся режиме является как бы местом разрыва цепи, так как ток в цепи конденсатора при установившемся режиме равен нулю, для переменных токов емкость такой преграды не представляет. Если емкость находится в цепи какого-нибудь источника тока с изменяющимся напряжением, то на поверхности обкладок конденсатора меняется количество заряда и меняется электрическое поле в диэлектрике. Изменение заряда на обкладках связано с перемещением зарядов в проводах, соединяющих обкладки конденсатора с зажимами источника тока, т. е. с электрическим током во внешней части цепи, которому в электрическом поле диэлектрика соответствует индукционный ток или ток смещения.

Пусть конденсатор с емкостью C присоединен к синусоидальному внешнему напряжению $u = U_m \sin \omega t$ проводами, сопротивлением которых можно пренебречь ($r = 0$). В этом случае внешнее напряжение и напряжение конденсатора в любой момент будут равны между собой и будут направлены в противоположные стороны: $u = -e_q$.

Внешнему напряжению u в какой-нибудь момент t соответствует на обкладках конденсатора заряд

$$q = Cu = CU_m \sin \omega t. \quad (8,1)$$

Если за малый промежуток времени dt внешнее напряжение изменится на величину du , то заряд на обкладках изменится на

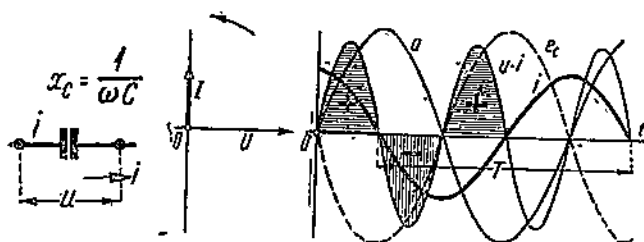
$$dq = Cdu = \omega CU_m \cos \omega t dt = \omega CU_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) dt,$$

и ток, протекающий в этот момент через соединительные провода и переходящий в диэлектрике в ток смещения, выразится через

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = \omega CU_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (8,2)$$

На чертеже (фиг. 16) представлены кривые изменения u , $e_c = -u$ и i в зависимости от времени. Когда напряжение увеличивается $\frac{du}{dt} > 0$ (первая четверть периода), конденсатор заряжается, и ток в цепи имеет то же направление, что и внешнее напряжение.

Когда напряжение достигает своей максимальной величины (при $t = \frac{T}{4}$), $\frac{du}{dt} = 0$, зарядка конденсатора прекращается, и ток равен нулю. Затем во вторую четверть периода внешнее напряжение уменьшается, и на обкладках конденсатора получается избыток зарядов: конденсатор разряжается и происходит перемещение зарядов в обратном направлении — ток отрицателен. Когда $u = 0$, ток имеет отрицательный максимум, так как в этот момент напряжение и заряд изменяются наиболее резко. При дальнейшем изменении внешнего напряжения ($u < 0$) в третью четверть периода происходит зарядка конденсатора в обратном направлении и ток продолжает оставаться отрицательным до тех пор, пока при $u = -U_m$ не закончится зарядка в обратном направлении и т. д.



Фиг. 16. Векторная диаграмма: кривые напряжения, тока и мощности при прохождении переменного тока через конденсатор (емкость).

Ток, проходящий через емкость, изменяется, так же как и приложенное к нему внешнее напряжение, по синусоиде, которая, однако, не отстает от синусоиды напряжения, как в случае индуктивности, а опережает синусоиду напряжения на 90° . В векторной диаграмме вектор тока опережает вектор внешнего напряжения на 90° .

При синусоидальном изменении напряжения амплитуда тока в конденсаторе выражается через амплитуду напряжения следующим образом: $I_m = \omega C U_m$.

Разделив амплитуды на $\sqrt{2}$, мы получаем, что

$$I = \omega C U = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U}{x_c} \quad (8,3)$$

Ток в емкости при заданном напряжении пропорционален емкости и частоте. Из последнего соотношения видно, что величина $\frac{1}{\omega C} = \frac{U}{I}$, представляющая собой отношение между эффективными значениями

напряжения и тока, должна иметь размерность сопротивления и измеряться в омах. Мы эту величину

$$\frac{1}{\omega C} = x_C \quad (8,4)$$

будем называть реактансом емкости и обозначать через x_C .

Выше мы задавались напряжением между обкладками конденсатора и определяли ток. Если, наоборот, нам задается ток, проходящий через емкость, $i = I_m \sin \omega t$, то к конденсатору должно быть приложено напряжение, равное заряду на его обкладках, деленному на емкость.

Из уравнения (8,2) $du = \frac{dq}{C} = \frac{idt}{C}$ следует, что внешнее напряжение между

обкладками конденсатора должно равняться $u = \int_{i=I_m}^{i=i} \frac{idt}{C}$.

Выше мы показали, что при синусоидальном изменении напряжения и тока внешнее напряжение, а следовательно, и заряд конденсатора равны нулю в тот момент, когда ток имеет максимальное значение (фиг. 16). Поэтому интеграл $\int i dt$ при установившемся режиме должен быть взят в пределах от момента, когда u , меняясь с минуса на плюс, проходит через нуль, или когда ток равен своему положительному максимуму (это будет, когда $t = \frac{T}{4}$) до рассматриваемого нами момента t , для которого мы хотим определить u , и когда ток равен i ,

$$\begin{aligned} u &= \int_{\frac{T}{4}}^t \frac{i dt}{C} = \int_{\frac{T}{4}}^t \frac{I_m \sin \omega t d(\omega t)}{\omega C} = -\frac{I_m}{\omega C} \left| \cos \omega t \right|_{\frac{T}{4}}^t = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = \\ &= \frac{I_m}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = U_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (8,5)$$

Мы получаем, что при синусоидальном изменении тока потребное напряжение будет тем меньше, чем больше емкость и чем больше частота, и что напряжение отстает от тока на фазовый угол в 90° .

Мгновенная мощность переменного тока в цепи, в которой имеется одна емкость (см. § 3, теорему III), равна произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m \sin \omega t I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{U_m I_m}{2} \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \\ &- \frac{U_m I_m}{2} \cos \left(2\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (8,6)$$

Она представляется синусоидой с двойной частотой, ось симметрии этой синусоиды совпадает с осью абсцисс. Во время зарядки в промежуток времени, равный четверти периода, в течение которого u меняется от 0 до U_m , происходит накопление энергии:

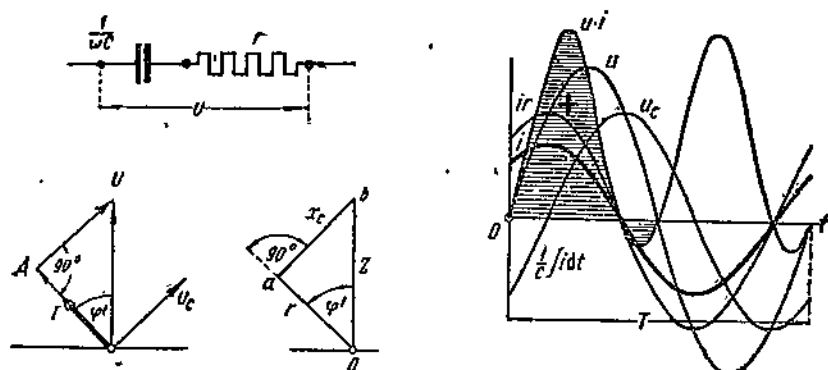
$$\int_0^{\frac{T}{4}} ui dt = \int_{u=0}^{u=U_m} uC \frac{du}{dt} dt = C \int_0^{U_m} u du = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Эта энергия, накапливающаяся в электрическом поле между обкладками конденсатора, освобождается в следующую четверть периода. Зарядка и разряд конденсатора в совокупности не требуют затраты энергии, и средняя мощность равна нулю:

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = UI \cos 90^\circ = 0. \quad (8,7)$$

Сравнивая два случая, когда в цепь включена одна лишь индуктивность и когда в цепи имеется лишь одна емкость, мы видим, что при одном и том же напряжении ток в первом случае обратно пропорционален частоте и индуктивности, а во втором — прямо пропорционален частоте и величине емкости. В случае индуктивности вектор тока отстает от вектора напряжения, а в случае емкости — опережает вектор напряжения на 90° . В обоих случаях (средняя) мощность равна нулю.

Если цепь переменного тока состоит из емкости и активного сопротивления, соединенных последовательно (фиг. 17), то при прохождении



Фиг. 17. Диаграммы для последовательного соединения сопротивления и конденсатора (емкости).

через эту цепь переменного тока, представленного на векторной диаграмме вектором $\overline{OI}$, напряжение в каждый данный момент должно состоять из двух слагающих. Одна слагающая напряжения, так называемая активная слагающая, преодолевает активное сопротивление, и вектор ее совпадает по направлению с вектором тока; эффективное значение этой слагающей равно rI и изображается вектором $\overline{OA}$. Другая, так называемая реактивная, слагающая преодолевает реакцию емкости, и вектор ее $\overline{OU}_C$ отстает от вектора тока на 90° . Эффективное значение этой слагающей равно $x_C I = \frac{1}{\omega C} \cdot I$ и изображается вектором $\overline{OU}_C = AU$.

Эффективное значение напряжения цепи определится как геометрическая сумма этих двух слагающих:

$$U = \sqrt{(rI)^2 + (x_C I)^2} = I \sqrt{r^2 + x_C^2} = I \sqrt{r^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} = ZI, \quad (8,8)$$

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (8,9)$$

— так называемое полное сопротивление, или импеданс цепи.

Если напряжение изменяется по закону $u = U_m \sin \omega t$, то изменение тока представляется уравнением

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + x_C^2}} \sin(\omega t + \varphi') = I_m \sin(\omega t + \varphi'), \quad (8,10)$$

указывающим, что ток опережает по фазе напряжение на угол, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{x_C}{r} = \frac{1}{\omega Cr}. \quad (8,11)$$

Влияние емкости в цепи не сказывается, когда $C = \infty$. В этом случае $z = r$, $\varphi' = 0$ и $I = \frac{U}{r}$. Для пояснения этого возьмем плоский конденсатор, для которого $C = \frac{\epsilon S}{d}$. Уменьшая расстояние d между обкладками, мы увеличиваем емкость, и в пределе, когда $d = 0$, емкость конденсатора $C = \infty$, но одновременно с этим обкладки как бы коротко замыкаются и составляют неразрывный электрический проводник. Раздвигая обкладки (увеличивая d), мы уменьшаем емкость, и вместе с этим z увеличивается. Когда d будет велико, то $C \approx 0$ и $z \approx \infty$, что соответствует разрыву цепи.

Если мы реактанс емкости будем считать величиной отрицательной, то во всех вычислениях и построениях мы можем применять те же выводы, которые были сделаны для цепи, состоящей из активного сопротивления и индуктивности. Действительно, при $u = U_m \sin \omega t$ ток равен

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}} \sin(\omega t - \varphi) = I_m \sin(\omega t - \varphi), \quad (8,12)$$

причем угол сдвига φ будет отрицателен: $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{x_C}{r}$, и вектор тока опережает вектор напряжения. Разделив значения длин треугольника OAU на значение тока I , мы можем, выбрав соответствующий масштаб, построить треугольник полного сопротивления Oab , подобный треугольнику напряжений.

При данных r и x_C он строится таким же образом, как и для случая с индуктивностью с той разницей, что величина активного сопротивления $r = m_Z \cdot Oa$ откладывается по направлению вектора тока; но в то время как реакция индуктивности, перпендикулярная к Oa (как величина положительная), откладывалась в сторону вращения векторов, реакция же емкости $-x_C = m_Z \cdot ab$ строится также перпендикулярно к Oa , но (как величина отрицательная) откладывается в сторону, обратную вращению векторов; замыкающая Ob по величине равна полному сопротивлению:

$$z = \sqrt{r^2 + (-x_C)^2} = m_Z \cdot Ob;$$

внешнее напряжение совпадает с направлением полного сопротивления

Мощность переменного тока определяется в данном случае как произведение эффективных значений э. д. с. и тока, умноженное на косинус угла сдвига:

$$P = UI \cos \varphi = U \cos \varphi I = rI^2. \quad (8,13)$$

Эта мощность поглощается активным сопротивлением и переходит в теплоту.

Задача 5. К напряжению $U = 110$ В присоединена емкость $C = 20 \mu\text{F}$ последовательно с сопротивлением $r = 10 \Omega$. Требуется определить значение тока и сдвиг фаз: а) когда $f = 50$ Гц и б) когда $f = 500$ Гц.

Решение. В первом случае

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \Omega} = 159 \Omega;$$

$$z = \sqrt{r^2 + x_C^2} = \sqrt{10^2 + 159^2} \Omega = 159,5 \Omega;$$

$$I = \frac{U}{z} = \frac{110}{159,5} \text{ А} = 0,69 \text{ А};$$

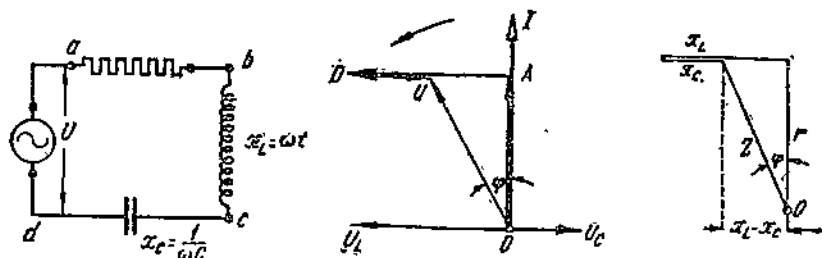
$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{x_C}{r} = -\frac{159}{10} = -15,9; \varphi = -86^\circ 25'.$$

Во втором случае

$$x_C = 15,9 \Omega; \quad z = 18,8 \Omega; \quad I = 5,85 \text{ А}; \quad \operatorname{tg} \varphi = -1,59; \quad \varphi = -57^\circ 50'.$$

9. Последовательное соединение сопротивления, индуктивности и емкости

Рассмотрим теперь общий случай, когда в цепь входят три разнородных элемента: сопротивление, индуктивность и емкость (фиг. 18).



Фиг. 18. Векторная диаграмма при последовательном соединении r , Z и C .

В такой цепи ток будет равен сумме внешнего напряжения и э. д. с., действующих в цепи, деленной на сопротивление цепи. Кроме внешнего напряжения U в рассматриваемой цепи будут действовать э. д. с. индуктивности

$$e_L = -L \frac{di}{dt}$$

и э. д. с. емкости, которая равна

$$e_C = -\frac{q}{C} = -\frac{\int i dt}{C}$$

(знак минус здесь должен быть поставлен потому, что э. д. с. емкости всегда направлена в сторону, противоположную приложенному к ее обкладкам напряжению), поэтому ток i будет равен

$$i = \frac{u + e_L + e_C}{L}, \quad (9,1)$$

а напряжение выразится через

$$u = ir - e_L - e_C = ir + L \frac{di}{dt} + \int \frac{i dt}{C}. \quad (9,2)$$

Решение этого дифференциального уравнения в общем виде требует больших математических выкладок. Мы можем очень упростить это решение, если будем исходить из того, что при установившемся режиме все напряжения и ток изменяются по закону синуса с одной и той же частотой, и если для нахождения соотношения между напряжениями у клемм отдельных элементов будем пользоваться не тригонометрическими формулами, а векторной диаграммой.

Пусть $\overline{OI}$ — вектор искомого тока $I = m_I \cdot OI$ (так как амплитуда и эффективные значения отличаются лишь множителем $\sqrt{2}$, то безразлично, будем ли мы откладывать на диаграмме амплитуды или эффективные значения, разница будет лишь в масштабах).

Напряжение на концах активного сопротивления (между точками a и b) rI совпадает по фазе с током и может быть представлено вектором $\overline{OA}$, имеющим то же направление, что и вектор тока.

Напряжение между клеммами индуктивной катушки (между точками b и c) по величине равно $U_L = \omega LI = m_U \cdot AD$ и опережает вектор тока на 90° .

Напряжение между обкладками конденсатора (между точками c и d) при прохождении через него тока I выражается через $\frac{1}{\omega C} \cdot I$ и может быть изображено вектором $\overline{DU}$.

Складывая векторы этих трех слагающих, мы в сумме должны получить вектор эффективного значения внешнего напряжения

$$\begin{aligned} \overline{OA} + \overline{AD} + \overline{DU} &= \overline{OA} + \overline{AU} = \overline{OU}, \\ rI &= m_U \cdot OA; \quad \omega LI - \frac{1}{\omega C} I = m_U \cdot AU; \\ OU^2 &= OA^2 + AU^2, \\ U^2 &= \left[r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right] \cdot I^2. \end{aligned} \quad (9,3)$$

На основании вышеприведенного геометрического построения мы можем найти соотношение между эффективными значениями внешнего напряжения и тока в цепи:

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{U}{Z}. \quad (9,4)$$

Умножая все отрезки в векторной диаграмме на $\sqrt{2}$, мы получим диаграмму амплитуд.

Ток в общем случае не будет совпадать по фазе с внешним напряжением. Угол φ , соответствующего сдвига фаз может быть определен по тангенсу

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AU}{OA} = \frac{\omega L I - \frac{1}{\omega C} \cdot I}{r I} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} = \frac{x_L - x_C}{r}, \quad (9,5)$$

поэтому, если внешнее напряжение задается нами через

$$u = U \sqrt{2} \sin \omega t = \dot{U}_m \sin \omega t,$$

то мгновенные значения тока, получающегося в цепи от этого напряжения, выражаются через

$$i = \frac{U_m \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t - \varphi). \quad (9,6)$$

Ток по своей фазе может или отставать от напряжения или опережать его. Сдвиг фаз измеряется углом между векторами напряжения и тока. При этом если напряжение опережает ток, то угол φ берется со знаком плюс, при отставании напряжения от тока — со знаком минус. Когда в цепи преобладает реактанс индуктивности $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, то ток по фазе отстает от напряжения и угол φ считается положительным; если же реактанс емкости больше реактанса индуктивности, то наоборот, ток опережает напряжение и угол φ получается отрицательным.

Отношение между эффективными значениями (или амплитудами) внешнего напряжения и тока представляет собой полное или кажущееся сопротивление или импеданс цепи:

$$\frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}. \quad (9,7)$$

Полное сопротивление может быть получено и геометрическим построением (фиг. 18): если численные значения длин всех отрезков в векторной диаграмме напряжений разделить на численное значение тока I , то мы получим диаграмму при токе, равном 1 А, и полученные отрезки по численной своей величине будут равны сопротивлениям r , $x_L = \omega L$, $x_C = \frac{1}{\omega C}$ и z .

Таким образом хотя активное сопротивление реактансы индуктивности и емкости и полное сопротивление не представляют собой векторов наподобие векторов поля или вращающихся векторов э. д. с., напряжений и токов, тем не менее, геометрическое их сложение заменяет вычисления, и кроме того, соответствующие треугольники сопротивлений $z^2 = r^2 + (x_L - x_C)^2$ дают взаимное расположение векторов напряжений и тока.

Внешнее напряжение совпадает с направлением z , а ток с направлением r , и сдвиг фаз между ними равен $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_L - x_C}{r}$.

Мощность (средняя) в рассматриваемой цепи будет равна произведению эффективных значений внешнего напряжения и тока, умноженному на угол сдвига фаз между ними:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin \omega t I_m \sin(\omega t - \varphi) \, dt = \\ = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi. \quad (9,8)$$

Так как из диаграммы напряжений следует, что $OA = OU \cos \varphi$, или $RI = U \cos \varphi$, то мощность может быть представлена и следующим образом:

$$P = UI \cos \varphi = rI^2. \quad (9,9)$$

Мощность тратится лишь на преодоление сопротивления и переходит в джоулево тепло. В индуктивности и емкости нет потерь энергии, так как мы приняли, что индуктивность не имеет активного сопротивления и потерь на перемагничивание окружающей катушку среды, а емкость — потерь в диэлектрике.

Задача 6. Определить значения тока, потребляемой мощности и $\cos \varphi$ цепи, состоящей из сопротивления $r = 5 \, \Omega$, индуктивности $L = 0,04 \, \text{H}$ и емкости $C = 40 \, \mu\text{F}$, если напряжение на концах цепи равно $U = 120 \, \text{V}$ для двух случаев: а) когда $f = 50 \, \text{Hz}$ и б) $f = 500 \, \text{Hz}$.

Решение.

$$\text{а) } \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \frac{1}{\text{sec}} = 314 \frac{1}{\text{sec}};$$

$$x_L = \omega L = 314 \cdot 0,04 \, \Omega = 12,56 \, \Omega;$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \, \Omega = 79,7 \, \Omega;$$

$$z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{5^2 + (12,56 - 79,7)^2} \, \Omega = 69,2 \, \Omega;$$

$$I = \frac{U}{z} = \frac{120}{69,2} \, \text{A} = 1,73 \, \text{A};$$

$$P = rI^2 = 5 \cdot 1,73^2 \, \text{W} = 15 \, \text{W};$$

$$P_i = UI = 120 \cdot 1,73 \, \text{VA} = 208 \, \text{VA};$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{P_i} = \frac{15}{208} = 0,072; \varphi = -85^\circ 50'.$$

$$\text{б) } \omega = 3140 \frac{1}{\text{sec}};$$

$$x_L = 125,6 \, \Omega; x_C = 7,97 \, \Omega; z = 117,7 \, \Omega; I = 1,02 \, \text{A}; P = 5,2 \, \text{W}; P_i = 123 \, \text{W};$$

$$\cos \varphi = 0,042; \varphi = 87^\circ 30'.$$

10. Общий случай последовательного соединения

Для нахождения напряжения, которое должно действовать на концах цепи, состоящей из ряда последовательно соединенных приемников энергии: r_1 и x_1 , r_2 и x_2 , r_3 и x_3 и т. д. (где x могут иметь или положительные или отрицательные значения), при прохождении через нее тока I ,

представленного по величине и направлению векторов OI (фиг. 19), мы должны определить напряжения на концах отдельных приемников:

$$I\sqrt{r_1^2 + x_1^2} = z_1 I = m_U \cdot OA, \quad x_1 > 0,$$

$$I\sqrt{r_2^2 + x_2^2} = z_2 I = m_U \cdot AB, \quad x_2 < 0,$$

$$I\sqrt{r_3^2 + x_3^2} = z_3 I = m_U \cdot BU, \quad x_3 > 0 \text{ и т. д.}$$

Геометрическая сумма всех этих напряжений даст по величине и направлению то напряжение, которое должно быть приложено ко всей цепи:

$$\begin{aligned} m_U \cdot OU = U &= \sqrt{(I \sum r_k)^2 + (I \sum x_k)^2} = \\ &= I \sqrt{(\sum r_k)^2 + (\sum x_k)^2} = Iz, \end{aligned} \quad (10,1)$$

где

$$\sum r_k = r_1 + r_2 + r_3 + \dots,$$

а

$$\sum x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \dots = \omega \sum L_k - \frac{1}{\omega} \sum \frac{1}{C_k},$$

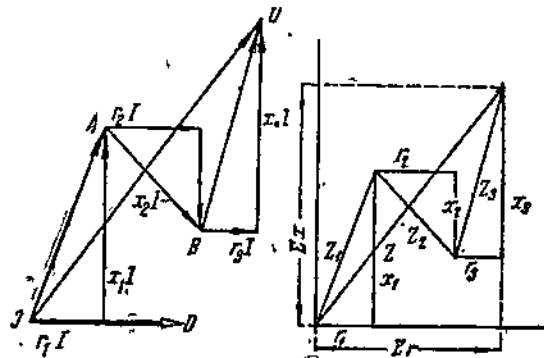
откуда

$$I = \frac{U}{\sqrt{(\sum r_k)^2 + (\sum x_k)^2}}.$$

Рассматриваемая цепь может быть заменена эквивалентной цепью, которая состоит из сосредоточенного в одном месте активного сопротивления $r = \sum r_k$ и реактивного сопротивления $x = \sum x_k$. Разделив значения всех векторов на значение тока I , мы получаем, что сопротивление всей цепи равно геометрической сумме полных сопротивлений отдельных приемников: $z_1, z_2, z_3, \dots$

Величина этого общего полного сопротивления определяется как гипотенуза прямоугольного треугольника, один

катет которого совпадает с вектором тока и равен $\sum r_k$, а другой равен $\sum x_k$ и откладывается перпендикулярно к нему по направлению вращения векторов, когда $\sum r_k > 0$, и против направления вращения векторов, когда $\sum x_k < 0$.



Фиг. 19. Векторная диаграмма при последовательном соединении сопротивлений.

Если, наоборот, для данной цепи известно действующее напряжение, то для нахождения тока строят треугольники эквивалентного полного сопротивления. Эффективное значение тока равно $I = \frac{U}{Z}$, а по фазе ток отстает от напряжения на угол φ : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum x}{\sum r}$.

Если $\sum x < 0$, то ток опережает (внешнее) напряжение.

При заданном напряжении $u = U_m \sin \omega t$ мгновенное значение тока выразится через

$$i = \frac{U_m \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(\sum r)^2 + (\sum \omega L - \sum \frac{1}{\omega C})^2}}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum \omega L - \sum \frac{1}{\omega C}}{\sum r} \quad (10,2)$$

Соответствующая же мощность равна

$$P = UI \cos \varphi.$$

Задача 7. К напряжению $U = 120 \text{ В}$ присоединены последовательно две ветви, состоящие из: 1) $r_1 = 2 \text{ }\Omega$; $L_1 = 0,02 \text{ Н}$; $C_1 = 20 \text{ }\mu\text{Ф}$ и 2) $r_2 = 10 \text{ }\Omega$; $L_2 = 0,4 \text{ Н}$; $C_2 = 40 \text{ }\mu\text{Ф}$. Частота $f = 50 \text{ Гц}$. Определить ток и напряжения на концах каждой ветви и сдвиг фаз между этими напряжениями.

Решение. Реактивное сопротивление первой ветви равно

$$x_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 314 \cdot 0,02 - \frac{1}{314 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} \text{ }\Omega = -153,2 \text{ }\Omega;$$

кажущееся сопротивление первой ветви

$$z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_1^2} = \sqrt{2^2 + (-153,2)^2} \text{ }\Omega = 153,3 \text{ }\Omega.$$

Сдвиг фаз между напряжением на концах первой ветви и током выражается через

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x_1}{r_1} = -\frac{153,2}{2} = -77,6;$$

$$\varphi_1 = -89^\circ 15'.$$

Для второй катушки

$$x_2 = 314 \cdot 0,4 - \frac{1}{314 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \text{ }\Omega = 46 \text{ }\Omega; \quad z_2 = \sqrt{10^2 + 46^2} \text{ }\Omega = 47 \text{ }\Omega,$$

а сдвиг фаз между напряжением и током

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{46}{10} = 4,6; \quad \varphi_2 = 77^\circ 45'.$$

Полное сопротивление всей цепи

$$z = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2} = \sqrt{12^2 + (-153,2 + 46)^2} \text{ }\Omega = 108 \text{ }\Omega;$$

ток в цепи равен

$$I = \frac{U}{z} = \frac{120}{108} \text{ А} = 1,11 \text{ А};$$

напряжение на концах первой ветви

$$U_1 = z_1 I = 153,3 \cdot 1,11 \text{ В} = 170 \text{ В};$$

на концах второй ветви

$$U_2 = z_2 I = 46 \cdot 1,11 \text{ В} = 51 \text{ В},$$

а сдвиг фаз между этими напряжениями

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 77^\circ 45' - (-89^\circ 15') = 167^\circ.$$

11. Ток и напряжения в цепи, содержащей r , L и C , в зависимости от частоты. Резонанс напряжений

В цепи, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления, индуктивности и емкости, напряжения у индуктивности и емкости имеют противоположную фазу и могут частично или полностью компенсировать друг друга. Поэтому в такой цепи могут получаться на обкладках конденсатора и на индуктивности напряжения, иногда во много раз превышающие внешнее напряжение.

Если при неизменности постоянных цепи r , L и C и постоянстве эффективного значения внешнего напряжения U будет меняться угловая частота ω (число периодов в 2π секунд), то одновременно будут меняться ток и напряжения у емкости и индуктивности:

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad U_C = \frac{I}{\omega C} \text{ и } U_L = \omega L I.$$

Особенно характерно такое состояние, когда напряжения у конденсатора и у индуктивности равны и взаимно уравновешиваются, т. е. когда

$$U_C = U_L = \frac{I}{\omega C} = \omega L I; \quad \frac{1}{\omega C} = \omega L, \text{ или } x_L = x_C.$$

Это явление называется резонансом напряжений (емкости и индуктивности). Оно имеет место при определенном соотношении индуктивности, емкости и угловой частоты $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, или если L и C заданы, то при определенной частоте, называемой резонансной частотой,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (11,1)$$

В случае резонанса ток совпадает по фазе с внешним напряжением:

$$u = U_m \sin \omega_0 t; \\ i = \frac{U_m \sin (\omega_0 t - \varphi)}{\sqrt{r^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)^2}} = \frac{U_m}{r} \sin \omega_0 t, \quad (11,2)$$

так как

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}}{r} = 0 \text{ и } z = r. \quad (11,3)$$

При резонансе напряжений реактансы емкости и индуктивности взаимно компенсируют друг друга, и величина тока такова, как будто бы в цепи имеется только активное сопротивление.

Если активное сопротивление весьма мало, то, несмотря на весьма значительные реактансы ωL и $\frac{1}{\omega C}$, могут получаться как весьма значительные токи, так и весьма значительные перенапряжения на клеммах индуктивности и емкости, что бывает особенно опасно в технике сильных токов.

Интересно еще отметить, что при заданных значениях L и C при резонансе реактансы индуктивности и емкости приобретают определенную величину, не зависящую от частоты, а именно

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 L &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot L = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0, \\ \frac{1}{\omega_0 C} &= \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0. \end{aligned} \right\} \quad (11,4)$$

Проследим, как изменяются ток и напряжения у емкости и индуктивности в зависимости от частоты при постоянном внешнем напряжении. Для этого приведем выражения для тока I и напряжений U_C и U_L к более удобному для целей исследования виду.

В случае резонанса ток в цепи будет

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)^2}} = \frac{U}{r} = \frac{U_L}{R_0} = \frac{U_C}{R_0}, \quad (11,5)$$

а напряжения у индуктивности и емкости составят

$$U_L = U_C = I \omega_0 L = \frac{I}{\omega_0 C} = U \frac{R_0}{r} = \frac{U}{m}. \quad (11,6)$$

Корень квадратный из отношения индуктивности и емкости имеет размерность сопротивления, и отношение активного сопротивления к этому корню

$$r : \sqrt{\frac{L}{C}} = r : R_0 = r : \omega_0 L = r : \frac{1}{\omega_0 C} = m \quad (11,7)$$

представляет собой весьма характерную для цепи r , L и C величину. Напряжения у индуктивности и емкости при резонансе будут тем больше, чем меньше значение m , т. е. чем меньше относительное значение сопротивления цепи.

При какой-нибудь другой частоте

$$\omega = k \omega_0,$$

где k — числовой коэффициент, который может меняться в пределах от 0 до ∞ , ток в цепи определится как

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(k \omega_0 L - \frac{1}{k \omega_0 C}\right)^2}} = \frac{U}{R_0 \sqrt{m^2 + \left(k - \frac{1}{k}\right)^2}}. \quad (11,8)$$

В этом случае напряжение между обкладками конденсатора может быть выражено через

$$U_C = \frac{I}{k \omega_0 C} = \frac{R_0 I}{k} = \frac{U}{k \sqrt{m^2 + \left(k - \frac{1}{k}\right)^2}}, \quad (11,9)$$

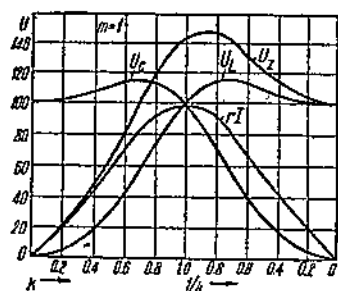
а напряжение у индуктивности

$$U_L = k \omega_0 L I = k R_0 I = \frac{U k}{\sqrt{m^2 + \left(k - \frac{1}{k}\right)^2}} \quad (11,10)$$

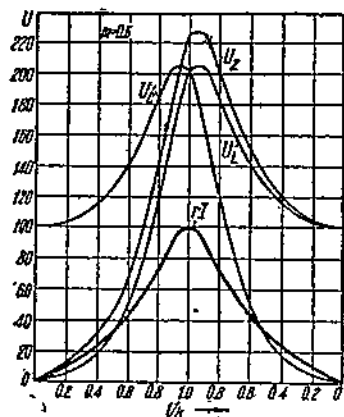
и, наконец, тангенс угла сдвига между током и напряжением — через

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k\omega_0 L - \frac{1}{k\omega_0 C}}{r} = \frac{k}{m} - \frac{1}{km} = \frac{\left(k - \frac{1}{k}\right)}{m}. \quad (11,11)$$

Так как в цепях активное сопротивление обыкновенно неразрывно связано с индуктивностью, а индуктивное падение напряжения равномерно распределяется вдоль витков, то наиболее опасным является обычно перенапряжение на емкости. Интерес может представить также значение на-



Фиг. 20. Кривые резонанса rI , U_L , U_C и U_Z в зависимости от k при $m = 1$.

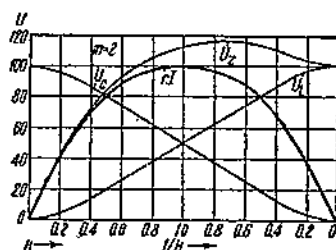


Фиг. 21. Кривые резонанса в зависимости от k при $m = 0,5$.

пряжения U_Z на катушке, включающей в себя активное сопротивление и индуктивность:

$$U_Z = I \sqrt{r^2 + k^2 \omega_0^2 L^2} = rI \sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2}} = \frac{U \sqrt{m^2 + k^2}}{\sqrt{m^2 + \left(k - \frac{1}{k}\right)^2}}. \quad (11,12)$$

На фиг. 20, 21 и 22 представлены так называемые резонансные кривые, вычисленные на основании выведенных выше формул в зависимости от угловой частоты. На этих чертежах по оси абсцисс отложены не частоты, а отношение переменной частоты к резонансной частоте, т. е. $\frac{\omega}{\omega_0} = k$. Далее, чтобы на чертеже уместился весь диапазон частот от нуля до бесконечности, значения k от нуля до единицы представлены отрезками, пропорциональными их значениям ($k=0,1; 0,2; 0,3; \dots$ до $k=1$), абсциссы же для $k>1$ выбраны таким образом, чтобы интервал от нуля до бесконечности занимал на оси абсцисс такое же расстояние, как и интервал от нуля до единицы. Это осуществляется таким



Фиг. 22. Кривые резонанса в зависимости от k при $m = 2$.

интервал от нуля до бесконечности занимал на оси абсцисс такое же расстояние, как и интервал от нуля до единицы. Это осуществляется таким

образом, что вправо от $k=1$ откладывается не k , а $\frac{1}{k}$ в порядке уменьшающихся значений $\frac{1}{k}$, а именно $\frac{1}{k}=0,9; 0,8; 0,7, \dots$ до $\frac{1}{k}=0$, что будет соответствовать $k=1,11; k=1,25; k=1,43; \dots$ до $k=\infty$. Этим мы достигаем еще и того, что кривые I , U_G и U_L получаются симметричными относительно вертикальной оси, проведенной для $k=1$.

Затем на этих чертежах отложены не значения токов, а активные падения напряжения $U_a = rI$, благодаря этому ордината rI для $k=1$ представляет собой величину внешнего напряжения, и ординаты кривых U_G , U_L и U_Z дают представление, как меняются эти напряжения при различных частотах по отношению к внешнему напряжению U .

Сравнивая кривые, построенные для разных значений m , мы прежде всего видим, что при очень малых частотах ($k \approx 0$) ток равен нулю (вследствие большого значения реактанса емкости $\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{k\omega_0 C}$), напряжение у индуктивности также равно нулю, а напряжение у конденсатора равно внешнему напряжению; равным образом при очень больших частотах ($k \approx \infty$) ток также равен нулю (в этом случае бесконечно велик будет реактанс индуктивности $\omega L = k\omega_0 L \approx \infty$), и наоборот, напряжение у конденсатора равно нулю; а напряжение у индуктивности равняется внешнему напряжению.

Характер кривых резонанса для U_G и U_L равно как и для U_Z зависит от значения m . Чем меньше $m = r \sqrt{\frac{L}{C}}$, тем большие значения по сравнению с внешним напряжением U приобретают напряжения U_G , U_L и U_Z . При этом максимумы напряжений на емкости и индуктивности получаются при частотах, отличных от резонансной частоты.

Максимум напряжения у конденсатора $U_G = U_{G \max}$ мы получаем при таком значении $k = k_G$, когда

$$\frac{\partial U_G}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \frac{U}{k \sqrt{m^2 + \left(k - \frac{1}{k}\right)^2}} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial (k^2)} (k^2 m^2 + k^4 - 2k^2 + 1) = m^2 + 2k_G^2 - 2 = 0,$$

т. е. при k_G равном

$$k_G = \sqrt{1 - \frac{m^2}{2}} = \sqrt{\frac{2 - m^2}{2}}. \quad (11,13)$$

При этом напряжение у конденсатора будет равно

$$U_{G \max} = \frac{U}{k_G \sqrt{m^2 + \left(k_G - \frac{1}{k_G}\right)^2}} = \frac{2U}{m \sqrt{4 - m^2}}. \quad (11,14)$$

Напряжение у индуктивности будет иметь максимум $U_L = U_{\max}$, когда

$$\frac{\partial U_L}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \frac{Uk}{\sqrt{m^2 + \left(k - \frac{1}{k}\right)^2}} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial (k^2)} \frac{k^2}{m^2 + k^2 - 2 + \frac{1}{k^2}} = 0; \quad m^2 + k_L^2 - 2 + \frac{1}{k_L^2} - k_L^2 \left(1 - \frac{1}{k_L^2}\right) = 0,$$

откуда мы находим, что

$$m^2 + \frac{2}{k_L^2} - 2 = 0,$$

или у индуктивности получится максимальное напряжение при частоте, для которой

$$k_L = \sqrt{\frac{2}{2 - m^2}} = \frac{1}{k_G}. \quad (11,15)$$

Таким образом индуктивность и емкость имеют максимум напряжения при разных частотах, но относительные значения этих частот (в долях резонансной угловой частоты) связаны соотношением

$$k_L k_G = 1. \quad (11,16)$$

При нашем способе построения кривых, при котором для частот от нуля до резонансной частоты откладываются непосредственно значения k , а для частот выше резонансной — обратные значения, $\frac{1}{k}$, в обратном направлении, кривые для U_G и U_L получаются симметричными.

Абсолютные значения $U_{G \max}$ и $U_{L \max}$ будут равны между собой, но получаться они будут при разных частотах: $k_G < 1$ и $k_L > 1$.

Чем меньше m , т. е. чем меньше значение сопротивления в цепи по сравнению с $\sqrt{\frac{L}{C}}$, тем больше будут $U_{G \max}$ и $U_{L \max}$, тем ближе k_G и k_L к единице. При весьма малых значениях m максимумы тока I и напряжений у емкости U_G и индуктивности U_L будут иметь место при одной и той же частоте (горбы кривых будут выше и будут сближаться). С увеличением m максимумы будут уменьшаться, и частоты, при которых они получаются, будут больше отстоять друг от друга (горбы кривых U_G и U_L будут снижаться и расходиться к $k=0$ и $k=\infty$). Максимумы U_G и U_L , превышающие внешнее напряжение, получаются лишь при значениях m меньших, чем $m = \sqrt{2}$, для которых $2 - m^2 > 0$. При $m^2 = 2$ максимум U_G совпадает с внешним напряжением, когда $k_G = 0$, а максимум U_L , когда $k_L = \infty$. При $m > \sqrt{2}$ U_G не имеет максимума, оно непрерывно уменьшается до нуля при изменении k от нуля до бесконечности, а U_L непрерывно возрастает от нуля до U при том же изменении k от нуля до бесконечности.

На тех же фигурах показано, как меняется величина напряжения у зажимов катушки, включающей в себе активное сопротивление и индуктивность.

Максимум напряжения у катушки, содержащей r и L , определяется аналогичным образом. Этот максимум имеет место при частоте $(k_z \omega_0)$

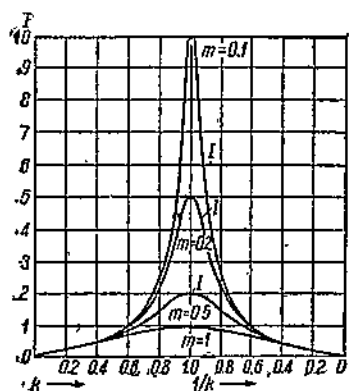
$$k_z = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 2m}}{2}}$$

Что касается сдвига фаз, то в пределах от $k=0$ до $k=1$ ток опережает внешнее напряжение, а при частотах больше резонансной, $k>1$, ток от напряжения отстает.

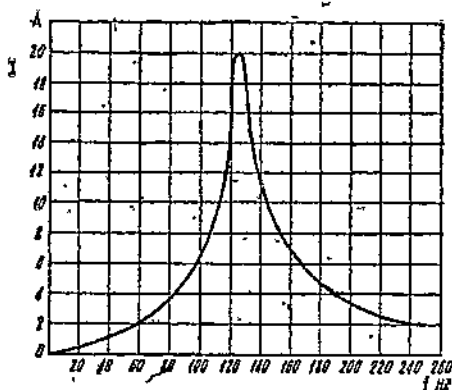
На фиг. 23 показано еще отдельно, как изменяется ток в цепи при постоянных U , L и C при разных $m = \frac{r}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$ по сравнению с током,

когда

$$r = \sqrt{\frac{L}{C}}$$



Фиг. 23. Кривые резонанса в зависимости от $m = \frac{r}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$.



Фиг. 24. К задаче 8.

Мы видим, что, чем меньше m , тем острее получаются кривые. Рассмотренные кривые для тока I , напряжений у емкости U_C и индуктивности U_L , построенные как функции частоты и выявляющие максимумы при определенной частоте, называются кривыми резонанса. При этом частоты могут откладываться на оси абсцисс обыкновенным образом, т. е. $k=0; 0,5; 1; 1,5; 2$ и т. д.

Аналогичные кривые получаются, если менять не частоту, а L или C .

Задача 8. Определить значения тока в зависимости от частоты в цепи с сопротивлением $r=5 \Omega$; $L=0,04 \text{ H}$; $C=40 \mu\text{F}$; при эффективном значении напряжения $U=100 \text{ V}$ и построить кривую $I=I(f)$.

Решение. Резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,04 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}} = 792 \frac{1}{\text{sec}}; f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 126 \text{ Hz}.$$

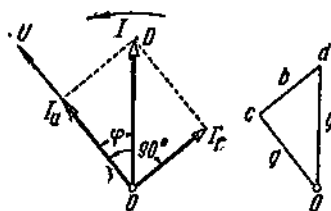
Подсчитывая токи для разных частот по формуле

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

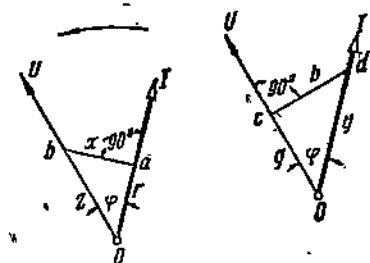
строим кривую, изображенную на фиг. 24.

12. Активная и реактивная проводимости цепи

Вместо того чтобы разлагать напряжение на две слагающих, одну, совпадающую с током, а другую, сдвинутую по фазе на 90° , при вычислениях, особенно, когда мы имеем дело с параллельными ветвями, иногда удобнее разложить ток на две слагающих так, чтобы одна, так называемая активная слагающая, совпадала по фазе с напряжением, а другая — реактивная, — была бы сдвинута на 90° (фиг. 25).



Фиг. 25. Векторная диаграмма тока и проводимости.



Фиг. 26. Диаграмма полного сопротивления и полной проводимости.

Пусть напряжение и ток в цепи, содержащей сопротивление и индуктивность, будут

$$u = U_m \sin \omega t,$$

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + x_L^2}} \sin(\omega t - \varphi) = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x_L^2}} = \frac{U}{Z}.$$

Эффективное значение активной слагающей тока, как это вытекает из векторной диаграммы, определится через

$$I_a = m_I \cdot OI_a = I \cos \varphi = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x_L^2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + x_L^2}} = \frac{rU}{r^2 + x_L^2} = \frac{r}{Z^2} \cdot U = gU, \quad (12,1)$$

а реактивной слагающей тока

$$I_r = m_I \cdot OI_r = I \sin \varphi = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x_L^2}} \cdot \frac{x_L}{\sqrt{r^2 + x_L^2}} = \frac{x_L U}{r^2 + x_L^2} = \frac{x_L}{Z^2} \cdot U = b_L U. \quad (12,2)$$

$$g = \frac{r}{z^2} = \frac{r}{r^2 + x_L^2} \quad (12,3)$$

называют активной проводимостью цепи (Konduktanz), а —

$$b_L = \frac{x_L}{z^2} = \frac{x_L}{r^2 + x_L^2} \quad (12,4)$$

— реактивной проводимостью (Suszeptanz); размерность g и b обратна размерности сопротивления.

Разложение тока на указанные две слагающие соответствует замене цепи, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления и индуктивности, двумя параллельно соединенными ветвями, из которых в одной ток совпадает с напряжением, а в другой ток отстает от напряжения на 90° .

Энергия будет поглощаться только в первой ветви, и мощность в этой цепи составит

$$UI_a \cos 0 = U \cdot gU = gU^2, \quad (12,5)$$

во второй же ветви мощность будет равна нулю:

$$UI_r \cos \frac{\pi}{2} = U \cdot bU \cos 90^\circ = bU^2 \cos 90^\circ = 0. \quad (12,6)$$

Поэтому мощность переменного тока вычисляется как произведение эффективных значений напряжения и активной слагающей тока.

Если значения сторон треугольника токов OI_aI разделить на значение напряжения U , то получится новый треугольник, так называемый треугольник проводимостей Ocd ; в нем $g = \frac{I_a}{U} = m_Y \cdot Oc$ представляет собой активную проводимость, $b_L = \frac{I_r}{U} = m_Y \cdot cd$ реактивную проводимость, а гипотенуза соответствует полной или кажущейся проводимости цепи

$$\begin{aligned} y = m_Y \cdot Od &= \sqrt{g^2 + b_L^2} = \sqrt{\frac{r^2 + x_L^2}{(r^2 + x_L^2)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + x_L^2}} = \frac{1}{z}. \end{aligned} \quad (12,7)$$

Следует обратить внимание на разницу в геометрическом нахождении полного сопротивления z и полной проводимости y . При нахождении z отрезок Oa , соответствующий величине активного сопротивления ($r = m_Z \cdot Oa$), откладывается по направлению вектора тока (фиг. 26), затем нормально к Oa откладывается отрезок ab , соответствующий реактанцу индуктивности ($x_L = \omega L = m_Z \cdot ab$), причем угол в 90° откладывается в сторону вращения векторов, тогда замыкающая Ob ($z = m_Z \cdot Ob$) указывает нам направление вектора напряжения по отношению к вектору тока (z относительно r повернуто по направлению вращения векторов).

При геометрическом нахождении y отрезок активной проводимости $Ос$ ($g = m_Y \cdot Ос$) откладывается по направлению напряжения, а отрезок, изображающий реактивную проводимость cd ($b_L = m_Y \cdot cd$), откладывается на линии cd , наклоненной к линии $Ос$ под углом в 90° , взятым в сторону, обратную вращению векторов; замыкающая Od ($y = m_Y \cdot Od$) повернута по отношению к $Ос$ в сторону, обратную вращению векторов, и указывает нам направление вектора тока.

Углы boA и cOd равны между собой и представляют собой угол сдвига между напряжением и током

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_L}{r} = \frac{b_L}{g}. \quad (12,8)$$

В случае если цепь переменного тока содержит сопротивление и емкость, ток I опережает напряжение U . В соответствии с этим реактивная слагающая тока опережает вектор напряжения на 90° . Для такой цепи активная и реактивная слагающие тока выражаются через

$$I_a = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (-x_C)^2}} \cos \varphi = \frac{rU}{\sqrt{r^2 + (-x_C)^2} \cdot \sqrt{r^2 + (-x_C)^2}} = \frac{rU}{z^2} = gU, \quad (12,9)$$

$$I_r = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (-x_C)^2}} \sin \varphi = \frac{(-x_C)U}{\sqrt{r^2 + (-x_C)^2} \cdot \sqrt{r^2 + (-x_C)^2}} = \frac{(-x_C)U}{z^2} = b_C U, \quad (12,10)$$

где $g = \frac{r}{r^2 + (-x_C)^2}$ представляет собой активную, а $b_C = \frac{-x_C}{r^2 + (-x_C)^2}$ — реактивную проводимости цепи.

Для геометрического нахождения полной проводимости у конца отрезка $Ос$, совпадающего по направлению с вектором напряжения и соответствующего активной проводимости g , строится нормально к $Ос$ отрезок реактивной проводимости ($b_C = m_Y \cdot cd$), который в данном случае откладывается в сторону, противоположную той, в которую откладывался отрезок реактивной проводимости индуктивности (фиг. 26). Замыкающая сторона треугольника соответствует величине полной проводимости цепи

$$y = m_Y \cdot Od = \sqrt{g^2 + (-b_C)^2} = \sqrt{\frac{r^2 + (-x_C)^2}{[r^2 + (-x_C)^2]^2}} = \frac{1}{z} \quad (12,11)$$

с ее направлением совпадает вектор тока.

Если даны активная и реактивная проводимости какой-нибудь ветви, то может быть решена и обратная задача нахождения активного и реактивного сопротивлений этой ветви

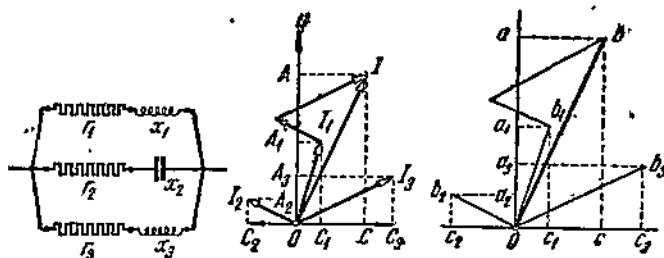
$$r = z \cos \varphi = \frac{1}{y} \cdot \frac{g}{y} = \frac{g}{y^2} \quad \text{и} \quad x = z \sin \varphi = \frac{1}{y} \cdot \frac{b}{y} = \frac{b}{y^2}.$$

13. Общий случай параллельного соединения

При параллельном соединении нескольких приемников энергии, предположим r_1 и x_1 , r_2 и x_2 , r_3 и x_3 и т. д. (фиг. 27), в точке их соединения в каждый данный момент для мгновенных значений токов имеет место первый закон Кирхгофа:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots,$$

а так как токи изменяются по закону синуса, то ясно, что вектор тока $I = m_I \cdot OI$, протекающего по неразветвленной части цепи, будет равен



Фиг. 27. Векторная диаграмма тока и проводимости для параллельно соединенных ветвей.

геометрической сумме векторов токов, протекающих по отдельным ветвям. Разлагаем ток в каждой ветви на две слагающих, активную и реактивную:

$$I_{1a} = \frac{r_1 U}{r_1^2 + x_1^2} = \frac{r_1 U}{z_1^2} = g_1 U; \quad I_{1r} = \frac{x_1 U}{r_1^2 + x_1^2} = \frac{x_1 U}{z_1^2} = b_1 U,$$

$$I_{2a} = \frac{r_2 U}{r_2^2 + x_2^2} = \frac{r_2 U}{z_2^2} = g_2 U; \quad I_{2r} = \frac{x_2 U}{r_2^2 + x_2^2} = \frac{x_2 U}{z_2^2} = b_2 U,$$

$$I_{3a} = \frac{r_3 U}{r_3^2 + x_3^2} = \frac{r_3 U}{z_3^2} = g_3 U; \quad I_{3r} = \frac{x_3 U}{r_3^2 + x_3^2} = \frac{x_3 U}{z_3^2} = b_3 U.$$

Здесь U — напряжение между точками разветвления. В средней ветви мы предположили емкость, а потому $b_2 < 0$ и I_{2r} опережает вектор $\overline{OU}$ ($U = m_U \cdot OU$) на 90° . Проекция вектора тока в неразветвленной части цепи на вектор напряжения $\overline{OU}$, т. е. активная слагающая равнодействующего тока, равна сумме активных слагающих тока в отдельных ветвях:

$$I_a = I_{1a} + I_{2a} + I_{3a} = g_1 U + g_2 U + g_3 U = U \sum g_k. \quad (13,1)$$

Равным образом мы получаем реактивную слагающую равнодействующего тока:

$$I_r = I_{1r} + I_{2r} + I_{3r} = b_1 U + b_2 U + b_3 U = U \sum b_k. \quad (13,2)$$

Ток в неразветвленной части цепи равен

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2} = U \sqrt{(\sum g_k)^2 + (\sum b_k)^2}. \quad (13,3)$$

При параллельном соединении складываются проводимости, и несколько параллельно соединенных приемников энергии могут быть заменены одним эквивалентным приемником, активная и реактивная проводимости которого равны сумме соответствующих проводимостей отдельных приемников:

$$g = \sum g_k \text{ и } b = \sum b_k.$$

Если все векторы тока (фиг. 27) уменьшить в отношении $U:1$ и полученные значения вычертить в масштабе проводимостей m_Y , то получится многоугольник полных проводимостей:

$$\frac{I_a}{U} = g = m_Y \cdot Oa; \quad \frac{I_r}{U} = b = m_Y \cdot Oc; \quad \frac{I}{U} = y = m_Y \cdot Ob,$$

$$\frac{I_{1a}}{U} = g_1 = m_Y \cdot Oa_1; \quad \frac{I_{1r}}{U} = b_1 = m_Y \cdot Oc_1; \quad \frac{I_1}{U} = y_1 = m_Y \cdot Ob_1$$

и т. д. На основании этого следует, что при параллельном соединении нескольких ветвей общая полная проводимость равна геометрической сумме полных проводимостей отдельных ветвей.

Если умножим напряжение U на значение общей проводимости, то получим величину тока

$$I = yU, \text{ где } y = \sqrt{(\sum g_k)^2 + (\sum b_k)^2}. \quad (13,4)$$

Направление же вектора тока определится из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum b_k}{\sum g_k}, \quad (13,5)$$

когда $\operatorname{tg} \varphi > 0$, ток отстает от напряжения, в противном случае ток опережает напряжение между точками разветвления.

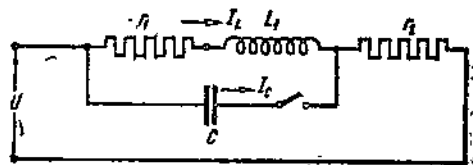
Мощность всех параллельных ветвей определяется как

$$P = g_1 U^2 + g_2 U^2 + g_3 U^2 = U^2 \sum g_k = U \frac{U}{z} \cdot \frac{g}{y} = UI \cos \varphi. \quad (13,6)$$

Задача 9. Катушка с сопротивлением $r_1 = 200 \, \Omega$ и индуктивностью $L_1 = 0,24 \, \text{H}$ соединена последовательно с сопротивлением $r_2 = 50 \, \Omega$. Параллельно катушке может быть присоединена емкость $C = 10 \, \mu\text{F}$ (фиг. 28).

Внешнее напряжение равно $U = 200 \, \text{V}$; $f = 50 \, \text{Hz}$.

Определить ток в сопротивлении r_2 и сдвиг фаз между током в сопротивлении r_2 и напряжением U : а) когда емкость включена параллельно к катушке и б) когда она отключена, а также отношение токов в двух параллельных ветвях, когда емкость присоединена в катушке.



Фиг. 28. К задаче 9.

Решение. Квадрат кажущегося сопротивления катушки равен

$$z_1^2 = 200^2 + (314 \cdot 0,2)^2 = 43\,950 \, \Omega^2.$$

Активная проводимость катушки равна

$$g_1 = \frac{r_1}{z_1^2} = \frac{200}{43\,950} \frac{1}{\Omega} = 0,00455 \frac{1}{\Omega};$$

реактивная проводимость катушки

$$b_1 = \frac{\omega L_1}{z_1^2} = \frac{314 \cdot 0,2}{43950} \frac{1}{\Omega} = 0,00143 \frac{1}{\Omega};$$

реактивная проводимость конденсатора

$$b_G = \omega C = 314 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\Omega} = 0,00314 \frac{1}{\Omega}.$$

По этим данным находим активную и реактивную проводимости двух параллельных ветвей:

$$g = g_1 = 0,00455 \frac{1}{\Omega}; \quad b = b_1 - b_G = 0,00143 - 0,00314 \frac{1}{\Omega} = -0,00171 \frac{1}{\Omega};$$

$$y^2 = g^2 + b^2 = 0,00455^2 + 0,00171^2 \frac{1}{\Omega^2} = 23,6 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\Omega^2}.$$

По активной и реактивной проводимостям двух параллельных ветвей определяем активное и реактивное сопротивления эквивалентной цепи, которой могут быть заменены обе параллельные ветви:

$$r = \frac{g}{y^2} = \frac{4,55 \cdot 10^{-3}}{23,6 \cdot 10^{-6}} \Omega = 193 \Omega; \quad x = \frac{b}{y^2} = \frac{-1,71 \cdot 10^{-3}}{23,6 \cdot 10^{-6}} \Omega = -72,5 \Omega.$$

Теперь мы можем определить ток в сопротивлении r_2 , когда емкость включена:

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{(r+r_2)^2 + x^2}} = \frac{200}{\sqrt{243^2 + 72,5^2}} \text{ A} = 0,8 \text{ A}$$

и сдвиг фаз

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{x}{r+r_2} = \frac{-72,5}{243} = -0,299; \quad \varphi_2 = -16^\circ 40',$$

когда емкость не включена, то

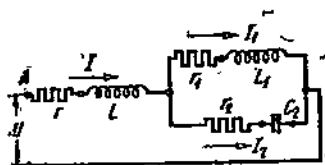
$$I_2' = \frac{U}{\sqrt{(r_1+r_2)^2 + x_1^2}} = \frac{200}{\sqrt{250^2 + 62,8^2}} \text{ A} = 0,775 \text{ A};$$

сдвиг фаз будет

$$\operatorname{tg} \varphi_2' = \frac{x_1}{r_1+r_2} = \frac{62,8}{250} = 0,251; \quad \varphi_2' = 14^\circ 10'.$$

Токи в двух параллельных ветвях обратно пропорциональны полным сопротивлениям, поэтому

$$\frac{I_L}{I_G} = \frac{x_G}{\sqrt{r_1^2 + x_1^2}} = \frac{314 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{200^2 + (314 \cdot 0,2)^2}} = 1,52.$$



Фиг. 29. К задаче 10.

Задача 10. Определить, какое напряжение должно быть приложено к точкам A и B цепи фиг. 29, в которой $r = 5 \Omega$; $L = 0,08 \text{ H}$; $r_1 = 6 \Omega$; $L = 0,1 \text{ H}$; $r_2 = 10 \Omega$; $C_2 = 100 \mu\text{F}$; если ток I_1 , протекающий в ветви L_1 , равен $I_1 = 5 \text{ A}$ ($f = 50 \text{ Hz}$).

Решение. Задача может быть решена графически (фиг. 30). Начинаем построение с вектора тока $I_1 = m_1 \cdot OI_1$, затем откладываем по направлению I_1 отрезок

$$r_1 I_1 = m_U \cdot Oa = 6 \cdot 5 \text{ V} = 30 \text{ V}$$

и под прямым углом к нему в сторону вращения векторов отрезок

$$x_1 I_1 = m_U \cdot aU_1 = 314 \cdot 0,1 \cdot 5 \text{ V} = 157 \text{ V}.$$

Затем измеряем на чертеже длину отрезка OU_1 и находим напряжение между точками разветвления

$$m_U \cdot OU_1 = U_1 \approx U_2 = 160 \text{ В}$$

и определяем проводимости ветви r_2, C_2 :

$$g_2 = \frac{r_2}{r_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C_2^2}} = \frac{10}{10^2 + \frac{1}{314^2 - 100^2 \cdot 10^{-12}}} \cdot \frac{1}{Q} = 0,009 \cdot \frac{1}{Q}$$

$$b_2 = \frac{-\frac{1}{\omega C_2}}{r_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C_2^2}} = -0,0286 \cdot \frac{1}{Q}$$

По проводимостям вычисляем активную и реактивную слагающие тока активную слагающую, равную

$$I_{2a} = g_2 U_2 = 0,009 \cdot 160 \text{ А} = 1,44 \text{ А} = m_I \cdot OI_{2a},$$

мы откладываем по направлению напряжения OU_1 и реактивную слагающую

$$I_{2r} = b_2 U_2 = -4,57 \text{ А} = m_I \cdot OI_{2r}$$

— под прямым углом к вектору OU_1 (так как реактивная слагающая тока опережает напряжение на концах ветви на 90°). Геометрическая сумма векторов OI_{2a} и OI_{2r} дает нам вектор тока I_2 , равный

$$I_2 = m_I \cdot OI_2 = 4,8 \text{ А},$$

Складывая затем геометрически OI_2 и OI_1 , мы находим по величине и направлению ток в неразветвленной части цепи

$$I = m_I \cdot OI = 2,4 \text{ А}.$$

Чтобы найти напряжение между зажимами А и В, мы должны к напряжению U_1 прибавить активное падение напряжения в сопротивлении r , равное

$$rI = 5 \cdot 2,4 \text{ В} = 12 \text{ В} = m_U \cdot U_1 b,$$

и реактивное падение напряжения, равное

$$xI = 314 \cdot 0,08 \cdot 2,4 \text{ В} = 60 \text{ В} = m_U \cdot bU,$$

опережающее ток на 90° . Искомое напряжение будет

$$U = m_U \cdot OU = 188 \text{ В}.$$

Задача 11. Определить, какая емкость должна быть присоединена параллельно к приемнику энергии, мощность которого $P = 10 \text{ кВт}$ при $U = 220 \text{ В}$ и $I = 60 \text{ А}$, чтобы общий коэффициент мощности равнялся единице ($f = 50 \text{ Гц}$).

Решение. Активная слагающая тока в приемнике энергии равна

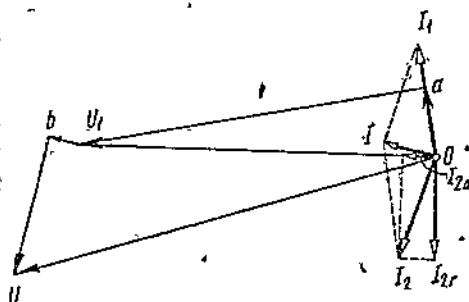
$$I_a = \frac{P}{U} = \frac{10000}{220} \text{ А} = 45,5 \text{ А}.$$

Реактивная слагающая тока равна

$$I_r = \sqrt{I^2 - I_a^2} = \sqrt{60^2 - 45,5^2} \text{ А} = 39,1 \text{ А}.$$

Этот ток должен быть скомпенсирован током емкости, поэтому реактанс емкости будет равен $\frac{1}{\omega C} = \frac{U}{I_r}$, откуда

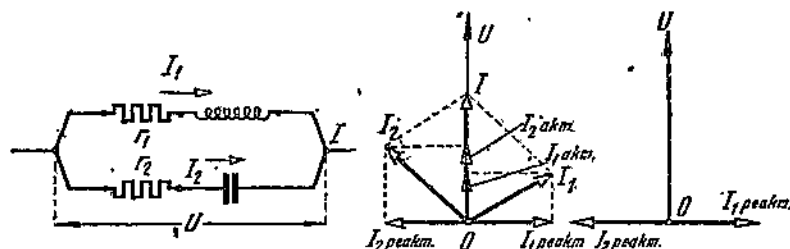
$$C = \frac{I_r}{\omega U} = \frac{39,1}{314 \cdot 220} \text{ Ф} = 565 \text{ мкФ}.$$



Фиг. 30. К задаче 10.

14. Резонанс токов

Заслуживает внимания явление так называемого резонанса токов, которое имеет место при параллельном соединении двух ветвей, когда в одной ветви имеется индуктивность, а в другой — емкость (фиг. 31) и ток в неразветвленной части цепи совпадает по фазе с напряжением между точками разветвления. Это бывает тогда, когда реактивная слагающая тока в одной ветви равна и противоположна по фазе реактивной слагающей тока в другой ветви.



Фиг. 31. Векторная диаграмма резонанса токов.

Пусть r_1 и $x_1 = \omega L$ и r_2 и $x_2 = -\frac{1}{\omega C}$ — сопротивления и реактансы обеих ветвей. Активные и реактивные проводимости будут:

$$g_1 = \frac{r_1}{z_1^2} = \frac{r_1}{r_1^2 + \omega^2 L^2}; \quad b_1 = \frac{x_1}{z_1^2} = \frac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2},$$

$$g_2 = \frac{r_2}{z_2^2} = \frac{r_2}{r_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}; \quad b_2 = \frac{x_2}{z_2^2} = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{r_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}},$$

при резонансе токов

$$I_r = I_{1r} + I_{2r} = 0, \quad (14,1)$$

т. е.

$$b_1 U + b_2 U = 0, \quad (14,2)$$

а потому резонанс токов будет иметь место при условии

$$b_1 + b_2 = 0 \text{ или } \frac{\omega_0 L}{r_1^2 + \omega_0^2 L^2} = \frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{r_2^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}}.$$

Преобразуя это равенство:

$$\omega_0^2 LC \left(r_2^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2} \right) = r_1^2 + \omega_0^2 L^2$$

и вынося за скобку ω_0^2 , мы получаем соотношение

$$\omega_0^2 (LCr_2^2 - L^2) = r_1^2 - \frac{L}{C} \text{ или } \omega_0^2 LC \left(r_2^2 - \frac{L}{C} \right) = r_1^2 - \frac{L}{C}, \quad (14,3)$$

из которого мы можем определить искомую частоту ω_0 , при которой получается резонанс токов. Предположим, для упрощения, что сопро-

тивления в обеих ветвях одинаковы, т. е. что $r_1 = r_2 = r$, тогда мы получаем для резонанса токов двух параллельных ветвей

$$\omega_0^2 LC = 1; \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \text{и} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (14,4)$$

такое же условие, как и для резонанса напряжений, в случае если бы r_1 , L и r_2 , C были соединены последовательно, т. е. для резонанса напряжений замкнутого контура, состоящего из двух рассматриваемых ветвей, соединенных последовательно.

Исследуем, как меняются токи в обеих ветвях и в неразветвленной части цепи. Введем, как и при резонансе напряжений, следующие обозначения:

$$\omega = k\omega_0 \quad \text{и} \quad r : \sqrt{\frac{L}{C}} = r : R_0 = m,$$

тогда

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot L = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0 = \frac{r}{m}.$$

Активные и реактивные слагающие тока для обеих ветвей выразятся через

$$I_{1a} = g_1 U = \frac{rU}{r^2 + (k\omega_0 L)^2} = \frac{mU}{R_0(m^2 + k^2)};$$

$$I_{1r} = b_1 U = \frac{k\omega_0 LU}{r^2 + (k\omega_0 L)^2} = \frac{kU}{R_0(m^2 + k^2)};$$

$$I_{2a} = g_2 U = \frac{rU}{r^2 + \left(\frac{1}{k\omega_0 C}\right)^2} = \frac{k^2 mU}{R_0(1 + k^2 m^2)};$$

$$I_{2r} = b_2 U = \frac{-\frac{1}{k\omega_0 C} \cdot U}{r^2 + \left(\frac{1}{k\omega_0 C}\right)^2} = \frac{-kU}{R_0(1 + k^2 m^2)};$$

токи же в ветвях и суммарный — через:

$$I_1 = \sqrt{I_{1a}^2 + I_{1r}^2} = \frac{U}{\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{m^2 + k^2}},$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2a}^2 + I_{2r}^2} = \frac{kU}{\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 + k^2 m^2}};$$

$$I = \sqrt{(I_{1a} + I_{2a})^2 + (I_{1r} + I_{2r})^2} =$$

$$= \frac{U}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \sqrt{\frac{4m^2 + \left(k - \frac{1}{k}\right)^2}{(m^2 + 1)^2 + m^2 \left(k - \frac{1}{k}\right)^2}}. \quad (14,5)$$

В случае резонанса ($k=1$) токи выразятся через

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}; \quad I = \frac{U}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot \frac{2m}{m^2+1}. \quad (14,6)$$

Интересно отметить, что когда активное сопротивление в обеих ветвях равно нулю

$$m = r; \quad \sqrt{\frac{L}{C}} = 0,$$

то ток в неразветвленной части при резонансе также равен нулю ($I=0$), токи же в обеих ветвях $\frac{U}{\omega_0 L}$ и $U\omega_0 C$ равны между собой, и так как один из них отстает, а другой опережает напряжение на 90° , то сдвиг фаз между токами в разветвлениях составляет 180° и сумма токов равна нулю. Другими словами, при резонансе токов и отсутствии активного сопротивления две параллельные ветви представляют собой для внешней цепи бесконечно большое сопротивление или электрическую пробку, и общее сопротивление обеих параллельных ветвей будет бесконечно велико;

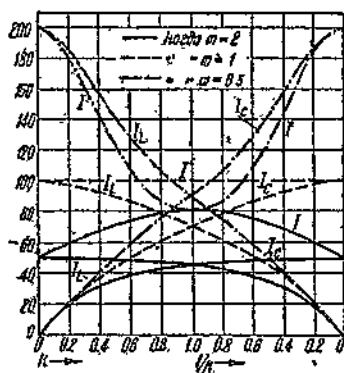
$$z = \frac{U}{I} = \left| \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{m^2+1}{2m} \right|_{m=0} = \infty. \quad (14,7)$$

Интересен также случай резонанса, когда в обеих ветвях активное сопротивление равно реактивному сопротивлению контура, состоящего из обеих ветвей

$$r_1 = r_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0, \quad \text{т. е. } m=1.$$

В этом случае ток в неразветвленной части цепи совершенно не зависит от числа периодов

$$I = \frac{U}{\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$



Фиг. 32. Изменение токов в зависимости от частоты в неразветвленной цепи I и в двух ветвях: с индуктивностью I_L и с емкостью I_C при различных значениях m .

На фиг. 32 вычерчены в зависимости от k в пределах от нуля до 1 и в зависимости от $\frac{1}{k}$, от $k=1$ до $k=\infty$ кривые токов в каждой из параллельных ветвей I_C и I_L , а также и суммарного тока.

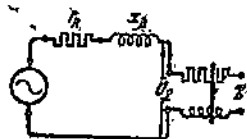
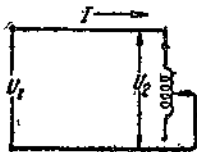
При значениях $m > 1$, например, $m=2$, численное значение суммарного тока I всегда больше значения тока в каждой из обеих ветвей, и при резонансе суммарный ток достигает своего максимального значения. При сравнительно малых сопротивлениях, когда $m < 1$, при резонансе ток в неразветвленной цепи достигает своего минимума, причем сум-

марный ток может быть значительно меньше, чем ток в каждой из ветвей. Что касается сдвига фаз, то при частотах ниже резонансной суммарный ток отстает от напряжения между точками разветвления, при частотах же выше резонансной суммарный ток это напряжение опережает.

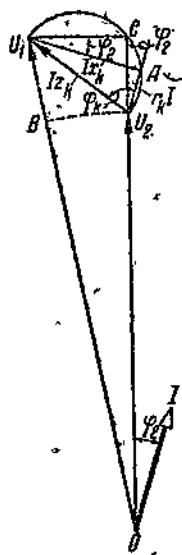
15. Падение и потеря напряжения

Рассмотрим передачу энергии по линии, в начале которой поддерживается постоянное напряжение U_0 (фиг. 33).

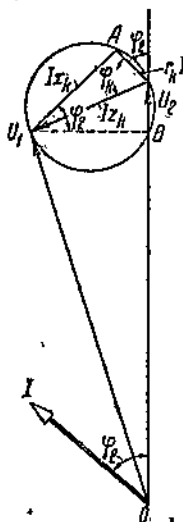
Пусть активное сопротивление (обоих проводов) линии будет r_k , а реактанс петли, образуемой обоими проводами линии, $x_k = \omega L$, и следовательно, полное сопротивление $z_k = \sqrt{r_k^2 + x_k^2}$ и $\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{x_k}{r_k}$.



Фиг. 33 и 34. Схема замещения линии передачи при меняющейся нагрузке на конце линии.



Фиг. 35. Векторная диаграмма падения и потери напряжения при отстающем токе.



Фиг. 36. Векторная диаграмма падения и потери напряжения при опережающем токе.

Предположим далее, что нагрузка на конце линии меняется, сохраняя постоянный угол сдвига между напряжением и током $\cos \varphi = \text{const}$, и обозначим переменное полное сопротивление приемника энергии через z (фиг. 34). Рассматриваемая цепь будет вполне тождественна с цепью, в которой действует постоянная э. д. с. и в которую включено перед переменным сопротивлением $z = \sqrt{r^2 + x^2}$ постоянное сопротивление $z_k = \sqrt{r_k^2 + x_k^2}$.

Если $U_2 = m_U \cdot OU_2$ — вторичное напряжение (фиг. 35); $I = m_I \cdot OI$ — ток в цепи, то для получения первичного напряжения $U_1 = m_U \cdot OU_1$ мы должны к U_2 геометрически прибавить падение напряжения в z_k , состоящее из активного падения напряжения $r_k I = m_U \cdot U_2 A$, совпадающего с направлением вектора тока OI и реактивного падения напряжения $x_k I = m_U \cdot AU_1$, опережающего вектор тока на 90° (фиг. 35):

$$m_U \cdot U_2 U_1 = I \sqrt{r_k^2 + x_k^2} = z_k I.$$

Из диаграммы видно, что потеря напряжения, определяемая как арифметическая разность между напряжениями в начале и в конце линии, будет меньше, чем падение напряжения:

$$U_1 - U_2 = m_U \cdot BU_1; \quad U_1 - U_2 < z_k I. \quad (15, \text{Б})$$

При небольших падениях напряжения в первом приближении можно ОС (проекцию OU_1 на направление OU_2) приравнять OU_1 , тогда

$$U_1 - U_2 = m_U \cdot U_2 C = m_U \cdot (U_2 A \cdot \cos \varphi_2 + AU_1 \cdot \sin \varphi_2) = r_k I \cos \varphi_2 + x_k I \sin \varphi_2.$$

На чертеже (фиг. 36) повторена та же диаграмма для опережающего тока, и здесь

$$U_1 - U_2 = m_U \cdot U_2 B = m_U \cdot (U_2 A \cdot \cos \varphi_2 - AU_1 \cdot \sin \varphi_2) = r_k I \cos \varphi_2 - x_k I \sin \varphi_2.$$

В общей форме потерю напряжения можно выразить через

$$U_1 - U_2 = r_k I \cos \varphi_2 + x_k I \sin \varphi_2, \quad (15,2)$$

если условиться, что угол сдвига φ_2 при емкостной нагрузке будет отрицательным.

При очень больших опережениях и большом реактансе линии x_k вторичное напряжение может быть даже больше, чем первичное. Это будет, когда

$$x_k \sin \varphi_2 > r_k \cos \varphi_2 \text{ или } \operatorname{tg} \varphi_2 > \operatorname{tg} \varphi_k.$$

Задача 12. Двухпроводная линия с активным сопротивлением $r = 0,6 \, \Omega$ и реактивным $x = 1,5 \, \Omega$ имеет на конце нагрузку $P_2 = 10 \, \text{kW}$ при $U_2 = 500 \, \text{V}$ и $\cos \varphi_2 = 0,8$. Определить потребное напряжение в начале линии, а также падение и потерю напряжения в процентах.

Решение. Определяем ток в приемнике энергии

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2 \cos \varphi_2} = \frac{10\,000}{500 \cdot 0,8} \, \text{A} = 25 \, \text{A}.$$

Заменяем приемник энергии эквивалентными активным и реактивным сопротивлениями

$$r_2 = \frac{P_2}{I_2^2} = \frac{10\,000}{25^2} \, \Omega = 16 \, \Omega; \quad \checkmark$$

$$x_2 = r_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = r_2 \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_2}}{\cos \varphi_2} = 16 \frac{\sqrt{1 - 0,8^2}}{0,8} \, \Omega = 12 \, \Omega.$$

Искомое напряжение будет

$$U_1 = I \sqrt{(r + r_2)^2 + (x + x_2)^2} = 25 \sqrt{16,6^2 + 13,5^2} \, \text{V} = 535 \, \text{V};$$

падение напряжения в процентах составляет

$$\frac{I_2 \sqrt{r^2 + x^2}}{U_1} \cdot 100 = \frac{25 \sqrt{0,6^2 + 1,5^2}}{535} \cdot 100 = 7,6\%,$$

а потеря напряжения

$$\frac{U_1 - U_2}{U_1} \cdot 100 = \frac{535 - 500}{535} \cdot 100 = 6,5\%.$$

16. Предельная мощность при передаче энергии

Определим мощность, передаваемую по линии приемнику энергии, или мощность во внешней цепи генератора с постоянной э. д. с.

и постоянным внутренним импедансом z_h . Ток и напряжение у приемника связаны уравнением

$$I = \frac{U_2}{z_2},$$

где z_2 — полное сопротивление приемника энергии. Мощность равна

$$P = U_2 I \cos \varphi_2 = \frac{U_2^2}{z_2} \cos \varphi_2.$$

Из треугольника напряжений OU_1U_2 (фиг. 35) следует, что

$$OU_1^2 = OU_2^2 + U_2U_1^2 + 2 \cdot OU_2 \cdot U_2U_1 \cdot \cos \angle CU_2U_1$$

или

$$U_1^2 = U_2^2 + z_h^2 I^2 + 2U_2 z_h I \cos(\varphi_h - \varphi_2).$$

Выражая в последнем уравнении I через U_2 , мы находим, что

$$U_1^2 = U_2^2 + \frac{z_h^2 U_2^2}{z_2^2} + \frac{2z_h U_2^2}{z_2} \cos(\varphi_h - \varphi_2),$$

откуда

$$U_2^2 = \frac{z_h^2 U_1^2}{z_h^2 + z_2^2 + 2z_2 z_h \cos(\varphi_h - \varphi_2)}.$$

Подставляя U_2^2 в выражение для мощности, мы получаем следующее выражение для полезной мощности в зависимости от z :

$$P = \frac{z_2 U_1^2 \cos \varphi_2}{z_h^2 + z_2^2 + 2z_2 z_h \cos(\varphi_h - \varphi_2)} = \frac{U_1^2 \cos \varphi_2}{\frac{z_h^2}{z_2} + z_2 + 2z_h \cos(\varphi_h - \varphi_2)}. \quad (16,1)$$

Полезная мощность при заданном $\cos \varphi_2$ будет иметь максимум, когда переменная часть, знаменателя $z_2 + \frac{z_h^2}{z_2}$ будет минимум или когда

$$\frac{\partial}{\partial z_2} \left(z_2 + \frac{z_h^2}{z_2} \right) = 1 - \frac{z_h^2}{z_2^2} = 0,$$

т. е. когда

$$z_2 = z_h, \quad (16,2)$$

другими словами, когда полное сопротивление приемника энергии по своей численной величине будет равно полному сопротивлению линии, или применительно к генератору, когда полное внешнее сопротивление равно полному внутреннему сопротивлению генератора, при этом фазовые углы z_2 и z_h могут и не равняться друг другу.

В этом случае падение напряжения в линии или в генераторе равно напряжению у приемника энергии:

$$z_h I = z_2 I = U_2. \quad (16,3)$$

Это положение можно было бы выразить также следующим образом: данный источник переменного тока (генератор) дает наибольшую мощность тогда, когда падение напряжения внутри источника равно внешнему напряжению. При наибольшей мощности вектор падения напря-

жения в линии $U_2 U_1$ и вектор напряжения на конце линии OU_2 составляют равнобедренный треугольник.

Если в уравнение (16,1) вместо z_2 подставить z_k , то получим максимальную мощность при заданном $\cos \varphi_2$, которая будет равна

$$P_{\max} = \frac{U_1^2 \cos \varphi_2}{2z_k [1 + \cos(\varphi_k - \varphi_2)]} \quad (16,4)$$

Эта величина в свою очередь зависит от величины угла сдвига во внешней цепи φ_2 .

$P_{\max}$ в свою очередь будет иметь максимальное значение, когда

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\max}}{\partial \varphi_2} &= 0 \text{ или когда} \\ [1 + \cos(\varphi_k - \varphi_2)] \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 \sin(\varphi_k - \varphi_2) &= 0; \\ -\sin \varphi_2 - \sin(\varphi_k - \varphi_2 + \varphi_2) &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что при

$$\varphi_2 = -\varphi_k \text{ и } z_2 = z_k \quad (16,5)$$

мы получаем наибольшую мощность, которую вообще можно получить во внешней цепи,

$$(P_{\max})_{\max} = \frac{U_1^2 \cos \varphi_k}{2z_k (1 + \cos 2\varphi_k)} = \frac{U_1^2}{4z_k \cos \varphi_k} = \frac{U_1^2}{4r_k} \quad (16,6)$$

В этом случае реактанс линии должен компенсироваться реактансом емкости внешней цепи

$$x_k = z_k \sin \varphi_k \text{ и } x_2 = z_k \sin(-\varphi_k) = -z_k \sin \varphi_k, \quad (16,7)$$

а активные сопротивления линии и приемника энергии должны быть равны между собой:

$$r_k = z_k \cos \varphi_k = z_2 \cos(-\varphi_k) = r_2. \quad (16,8)$$

Коэффициент полезного действия в этом случае равняется только половине:

$$\frac{r_2 I^2}{(r_k + r_2) I^2} = 0,5. \quad (16,9)$$

Задача 13. К источнику переменного тока с напряжением при холостом ходе $U_0 = 550 \text{ В}$ и с внутренним сопротивлением $r_k = 1 \Omega$ и $x_k = 5 \Omega$ подключен приемник энергии с коэффициентом мощности $\cos \varphi_2 = 0,8$. Определить максимальную мощность, которую может получить приемник энергии.

Решение. Полюс внутреннее сопротивление источника переменного тока равно

$$z_k = \sqrt{r_k^2 + x_k^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} \Omega = 5,1 \Omega.$$

При максимальной мощности в приемнике энергии

$$\begin{aligned} z_2 = z_k = 5,1 \Omega \text{ и } r_2 = z_2 \cos \varphi = 5,1 \cdot 0,8 \Omega = 4,08 \Omega; \\ x_2 = z_2 \sin \varphi = 5,1 \cdot 0,6 \Omega = 3,06 \Omega. \end{aligned}$$

Ток при максимальной мощности будет

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{(r_k + r_2)^2 + (x_k + x_2)^2}} = \frac{550}{\sqrt{(1 + 4,08)^2 + (5 + 3,06)^2}} \text{ A} = 58 \text{ A},$$

а максимальная мощность будет

$$P_{\max} = r_2 I^2 = 4,08 \cdot 58^2 \text{ W} = 13,8 \text{ kW},$$

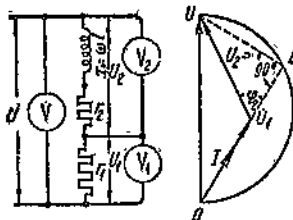
при этом напряжение у зажимов приемника энергии будет

$$U_2 = z_2 I = 5,1 \cdot 58 \text{ V} = 296 \text{ V}.$$

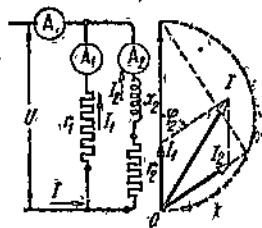
17. Измерение мощности

Метод трех вольтметров. При помощи трех вольтметров можно определить мощность, потребляемую приемником энергии, а также его сопротивление, реактанц цепи и полное сопротивление, если последовательно с приемником включить активное сопротивление известной величины (фиг. 37).

Пусть U_2 — напряжение на концах приемника энергии; U_1 — на концах известного активного сопротивления r_1 и U — напряжение, получающееся при последовательном соединении приемника с $z = \sqrt{r_2^2 + x_2^2}$ и сопротивления r_1 . По этим трем напряжениям строим треугольник OU_1U , и пусть



Фиг. 37. Измерение мощности тремя вольтметрами.



Фиг. 38. Измерение мощности тремя амперметрами.

$$U_1 = r_1 I = m_U \cdot O U_1; U_2 = I \sqrt{r_2^2 + x_2^2} = m_U \cdot U_1 U; U = m_U \cdot O U.$$

Из этого треугольника следует, что

$$U^2 = U_2^2 + U_1^2 + 2U_2 U_1 \cos \varphi_2 = U_2^2 + U_1^2 + 2U_2 r_1 I \cos \varphi_2,$$

где φ_2 — угол сдвига между напряжением и током в приемнике энергии. Из этого соотношения может быть определена искомая мощность

$$P_2 = U_2 I \cos \varphi_2 = \frac{U^2 - U_2^2 - U_1^2}{2r_1}. \quad (17,1)$$

По мощности и току $I = \frac{U_1}{r_1}$ нетрудно уже определить сопротивление и реактанц приемника энергии

$$z_2 = \frac{U_2}{I} = \frac{U_2 r_1}{U_1}; r_2 = \frac{P_2}{I^2} = \frac{P_2 r_1^2}{U_1^2}; x_2 = \sqrt{z_2^2 - r_2^2}. \quad (17,2)$$

Этот метод применяется при измерении весьма малых мощностей; для достижения надлежащей точности необходимо, чтобы U_2 и U_1 были примерно равны. Для этого необходимо включать в цепь большое,

сопротивление последовательно с ветвью, мощность в которой подлежит измерению.

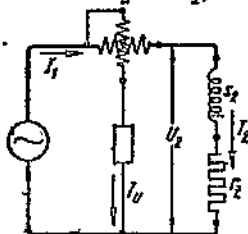
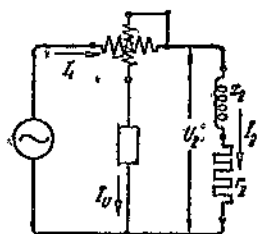
Метод трех амперметров. Мощность можно измерять также при помощи трех амперметров, если параллельно к приемнику энергии, мощность которого должна быть определена, присоединить активное сопротивление известной величины r_1 (фиг. 38) и измерять токи как в обеих параллельных ветвях I_2 и I_1 , так и в общей цепи I . Ток I_1 совпадает по фазе с напряжением $U_1 = r_1 I_1 = U_2 = U$, являющимся общим как для I_1 , так и для исследуемой цепи. Из треугольника, построенного по трем сторонам, имеем

$$I^2 = I_2^2 + I_1^2 + 2I_2 I_1 \cos \varphi_2 = I_2^2 + I_1^2 + 2I_2 \frac{U}{r_1} \cos \varphi_2 = \\ = I_2^2 + I_1^2 + 2 \frac{P_2}{r_1},$$

откуда

$$P_2 = \frac{(I^2 - I_2^2 - I_1^2) r_1}{2}. \quad (17,3)$$

При применении этого метода для получения надлежащей точности требуется примерное равенство I_2 и I_1 , что связано с большими потерями. Поэтому этот метод применяется, главным образом, в лабораториях.



Фиг. 39 и 40. Схемы включения ваттметра.

Метод ваттметра. Обыкновенно же мощность переменного тока измеряется при помощи ваттметров, состоящих в большинстве случаев из двух катушек без железа, — одной толстой (амперной обмотки), которая делается неподвижной и через которую протекает потребляемый ток, и другой — подвижной (вольтовой), присоединяемой через большое сопротивление к действующему у потребителя напряжению (фиг. 39 и 40). Показания прибора пропорциональны среднему значению произведений мгновенных значений токов в толстой и тонкой катушках. Эти показания будут пропорциональны (фиг. 39).

$$I_2 I_U \cos (\varphi_A - \varphi_U), \quad (17,4)$$

где I_2 — действующее значение тока в толстой, а I_U — в тонкой катушках, а φ_A и φ_U — сдвиг фаз этих токов по отношению к напряжению. Ток в ответвлении равен

$$I_U = \frac{U_2}{\sqrt{r_U^2 + \omega^2 L_U^2}} = \frac{U_2 \cos \varphi_U}{r_U}, \quad (17,5)$$

где r_U и L_U — сопротивление и индуктивность во всей ответвленной цепи.

Если выражение (17,4) умножить на r_U , то показания ваттметра будут пропорциональны выражению

$$I_2 I_U r_U \cos(\varphi_A - \varphi_U)$$

(от умножения на постоянную изменится только коэффициент пропорциональности).

Подставив затем I_U , мы найдем, что показания ваттметра будут пропорциональны

$$P' = I_2 I_U r_U \cos(\varphi_A - \varphi_U) = I_2 U_2 \cos \varphi_U \cos(\varphi_A - \varphi_U) = C\alpha' \quad (17,6)$$

(где α' — угол отклонения стрелки прибора), в то время как действительная мощность составляет

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2.$$

Поэтому для получения действительной мощности необходимо показания ваттметра умножить на поправочный коэффициент

$$\begin{aligned} P_2 &= P' \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_2}{U_2 I_2 \cos \varphi_U \cos(\varphi_A - \varphi_U)} = \\ &= C\alpha' \frac{I_2 \cos \varphi_2}{I_2 \cos \varphi_U (\cos \varphi_A \cos \varphi_U + \sin \varphi_A \sin \varphi_U)}. \end{aligned} \quad (17,7)$$

Обыкновенно токи в толстой обмотке и у потребителя ввиду малой разницы их величин можно приравнять, $I_2 = I_1$, и считать их совпадающими по фазе $\varphi_A = \varphi_2$. При этих условиях поправочный коэффициент будет равен

$$\frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_U (\cos \varphi_2 \cos \varphi_U + \sin \varphi_2 \sin \varphi_U)} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_U}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_U} \quad (17,8)$$

Он зависит от $\operatorname{tg} \varphi_U = \frac{\omega L_U}{r_U}$, следовательно, и от частоты, а также и от сдвига фаз в измеряемой цепи (φ_2). Для того чтобы этот коэффициент был по возможности близок к единице, т. е. чтобы показания ваттметра были действительно пропорциональны измеряемой мощности, необходимо, чтобы $\operatorname{tg} \varphi_U$ был по возможности меньше, что может быть достигнуто включением в цепь тонкой обмотки большого сопротивления r так, чтобы

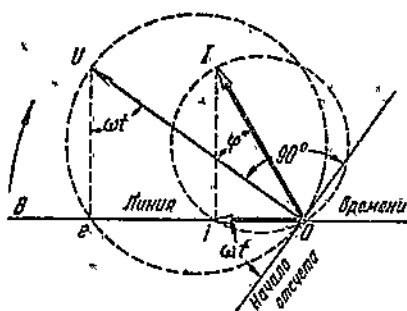
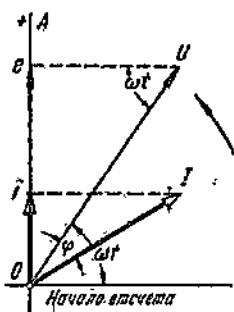
$$\operatorname{tg} \varphi_U = \frac{\omega L_U}{r_U} \approx 0. \quad (17,9)$$

При точных измерениях малых мощностей необходимо учесть еще и ту мощность, которая потребляется самим ваттметром и которая им учитывается сверх мощности, отдаваемой потребителю. При соединении тонкой обмотки после ваттметра (фиг. 39) эта поправка, которая должна быть вычтена из показаний ваттметра, равна $I_U^2 r = \frac{U^2}{r}$, а при присоединении тонкой обмотки до ваттметра (фиг. 40) эта поправка

равна $I^2 r_A$, где r_A — сопротивление толстой обмотки ваттметра. При высоких напряжениях и небольших токах следует давать предпочтение второй, а при низких напряжениях и больших токах — первой схеме, так как в таком случае поправки на потребление самого ваттметра делаются весьма незначительными.

18. Ось времени

До сих пор мы для графического представления явлений переменного тока пользовались векторными диаграммами, в которых векторы вращались около точки O с постоянной угловой скоростью ω против движения часовой стрелки (фиг. 41) и мгновенные значения величин,



Фиг. 41 и 42. Векторная диаграмма с вращающейся осью времени.

изменяющихся по закону синуса, представлялись проекциями этих векторов на некоторую неподвижную линию OA (вертикальную или какую-нибудь иную). При построении таких диаграмм не важно, какое положение занимает каждый вектор в отдельности; важно лишь относительное их расположение.

Для получения мгновенных значений мы можем себе представить все векторы неподвижными, а вращать некоторую проходящую через начало ось, называемую осью времени, с той же угловой скоростью, но в противоположную сторону, т. е. по направлению движения стрелки часов, и на эту вращающуюся ось проектировать неподвижные векторы (фиг. 42).

Если на векторах как на диаметрах провести окружности (проходящие через начало, т. е. через центр вращения оси времени), то эти окружности будут отсекают на вращающейся оси времени мгновенные значения величин, представляемых векторами.

ГЛАВА ВТОРАЯ

СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД

19. Основные положения теории комплексов

Метод векторных диаграмм дает ясное представление о взаимных соотношениях изменяющихся величин, характеризующих явления в простых цепях синусоидальных переменных токов. Однако определение числовых значений этих величин путем геометрического построения

векторных диаграмм не всегда дает желаемую точность благодаря погрешностям, свойственным всем графическим методам. Кроме того, векторные диаграммы для разветвленных цепей получаются иногда чрезвычайно сложными.

Аналитические способы определения величин имеют весьма большие преимущества перед графическими. В электротехнике из аналитических методов наибольшее распространение получил так называемый символический метод, основанный на применении комплексных чисел. Этот метод дает возможность выражать соотношения между величинами, изменяющимися по закону синуса, весьма простыми, наглядными алгебраическими уравнениями и применять для цепей переменного тока основные законы электрических цепей (закон Ома и законы Кирхгофа) в той же форме, как и для цепей постоянного тока.

Комплексом или комплексным числом в математике называют алгебраическую сумму, состоящую из действительного или вещественного числа и так называемого мнимого числа, представляющего собой корень квадратный из отрицательного числа: $a + \sqrt{-b^2} = a + \sqrt{-1} \cdot b = a + j \cdot b$.

Графически комплексы могут быть представлены в так называемой числовой плоскости в виде отрезков, имеющих определенное направление, или в виде условных векторов, равных геометрической сумме двух отрезков, отложенных в выбранном масштабе (например, 1 см длины равен m единицам) по двум взаимно перпендикулярным осям: одной так называемой оси действительных значений и другой, повернутой относительно первой на 90° против часовой стрелки, так называемой оси мнимых значений (фиг. 43). В зависимости от знаков a и b эти числа откладываются по положительному или отрицательному направлению этих осей. Оси, сохраняя взаимно перпендикулярное расположение, могут занимать любое положение на чертеже.

Кроме указанной выше алгебраической формы $a + jb$ комплексу может быть придана и тригонометрическая форма через так называемый модуль комплекса $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ и функции угла $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$, который образуется отрезком $\overline{OA}$, представляющим этот комплекс на чертеже, с осью действительных чисел, или же показательная форма, — в виде модуля, умноженного на так называемый поворотный множитель, определяющий поворот отрезка $\overline{OA}$ по отношению к оси действительных чисел:

$$m \cdot \overline{OA} = a + jb = r \cos \alpha + jr \sin \alpha = re^{j\alpha}. \quad (19,1)$$

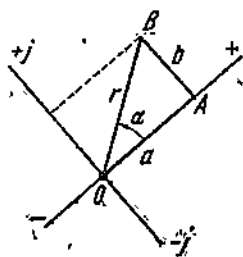
Угол α считается положительным, если вектор $\overline{OA}$ повернут относительно положительной полуоси действительных чисел против стрелки часов.

В американской литературе принято еще обозначать комплексы через модуль, к которому рядом приписывается угол, например,

$$re^{j\alpha} = r \cos \alpha + jr \sin \alpha = r \angle \alpha; \quad ye^{-j\varphi} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = y \angle -\varphi. \quad (19,2)$$

Из уравнения $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$ следует, что если α приравнять

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi,$$



Фиг. 43. Изображение комплексов в числовой плоскости.

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = +j; e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j;$$

$$e^{\pm j\pi} = \cos (\pm \pi) + j \sin (\pm \pi) = -1; e^{\pm j\frac{3\pi}{2}} = \cos \left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) + j \sin \left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) = \mp j;$$

$$e^{\pm j2\pi} = \cos (\pm 2\pi) + j \sin (\pm 2\pi) = +1;$$

$$e^{j(\alpha \pm 2\pi)} = e^{j\alpha}. \quad (19,3)$$

Если комплекс изображать в виде некоторого вектора, занимающего определенное положение в числовой плоскости, то умножение комплекса на множитель $e^{j\varphi}$ равноценно повороту этого вектора на угол φ против стрелки часов, а деление вектора на $e^{j\varphi}$ (или

умножение на $e^{-j\varphi}$, так как $\frac{1}{e^{j\varphi}} = e^{-j\varphi}$)

равноценно повороту этого вектора на угол φ по стрелке часов. Пусть нам дан вектор $\overline{OA}$ (фиг. 44 и 45):

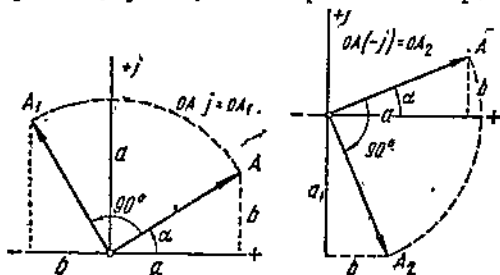
$$m \cdot \overline{OA} = re^{j\alpha} = a + jb = r \cos \alpha + jr \sin \alpha.$$

Умножаем и делим его на $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$:

$$\left. \begin{aligned} (m \cdot \overline{OA}) e^{j\varphi} &= re^{j\alpha} e^{j\varphi} = re^{j(\alpha+\varphi)} = r \cos (\alpha + \varphi) + jr \sin (\alpha + \varphi), \\ (m \cdot \overline{OA}) : e^{j\varphi} &= re^{j\alpha} e^{-j\varphi} = re^{j(\alpha-\varphi)} = r \cos (\alpha - \varphi) + jr \sin (\alpha - \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (19,4)$$

и мы получаем векторы, повернутые на угол φ по направлению и против направления стрелки часов относительно вектора $\overline{OA}$.

Так как $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$, то умножение комплекса на $+j$ соответствует повороту вектора, представленного комплексом на 90° против часовой стрелки, а умножение на $-j = -j \frac{j}{j} = \frac{1}{j}$, т. е. деление на j — повороту вектора на 90° по стрелке часов (фиг. 46, 47).



Фиг. 46 и 47. Умножение вектора на $+j$ и $-j$.

$$\left. \begin{aligned} (m \cdot \overline{OA})(+j) &= re^{j\alpha} j = re^{j\alpha} e^{j\frac{\pi}{2}} = (a + jb)j = -b + ja = m \cdot \overline{OA}_1; \\ (m \cdot \overline{OA})(-j) &= -re^{j\alpha} j = re^{j\alpha} e^{-j\frac{\pi}{2}} = (a + jb)(-j) = +b - ja = m \cdot \overline{OA}_2. \end{aligned} \right\} \quad (19,5)$$

20. Применение символического метода к теории переменных токов

Мгновенные значения изменяющейся в зависимости от времени [по закону синуса величины, например тока $i = I_m \sin \omega t$ в векторной диаграмме, определяются через проекции на определенную ось соответ-

ствующего вектора $I_m = m_x \cdot \overline{OI}$, вращающегося с равномерной угловой скоростью ω около центра и составляющего с начальной линией угол $\alpha = \omega t$.

Такой вращающийся вектор может быть представлен в виде:

$$I_m e^{j\omega t} = I_m \cos \omega t + j I_m \sin \omega t = \dot{I}_m = \sqrt{2} \dot{I}.$$

Если ось действительных значений принять за линию начала отсчета времени, то в комплексном выражении вращающегося вектора мгновенное значение переменной величины $i = I_m \sin \omega t$ определяется значением мнимой части (без множителя j).

В дальнейшем при применении символического метода мы (согласно стандарту) величины, изменяющиеся по закону синуса, будем обозначать через их эффективные значения (например, $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$) строчкой наверху, т. е. через $\dot{I}$.

Для нахождения связи между напряжением и током, выраженными в комплексной форме, можно исходить или из векторных диаграмм или из уравнения напряжения.

В цепи, состоящей из активного сопротивления и индуктивности, внешнее напряжение состоит из активного падения напряжения, которое в комплексной форме может быть выражено через $r\dot{I} = m_u \cdot \overline{OA}$, и из слагающей напряжения, преодолевающей э. д. с. индуктивности (фиг. 48). Если бы эта слагающая по фазе совпадала с током, то ее выражение было бы $\omega L \dot{I}$, а так как она по фазе опережает ток на четверть периода или 90° , то мы должны этой слагающей приписать множитель j , т. е. $j\omega L \dot{I} = m_u \cdot \overline{AU}$. Поэтому в комплексной форме внешнее напряжение может быть выражено через

$$\dot{U} = r\dot{I} + j\omega L \dot{I} = (r + j\omega L)\dot{I} = jze^{j\varphi} = Z\dot{I} \quad (20,1)$$

в случае синусоидального изменения напряжения и тока.

$$Z = r + j\omega L = r + jx_L = \sqrt{r^2 + x_L^2} (\cos \varphi + j \sin \varphi) = ze^{j\varphi} = z \angle \varphi \quad (20,2)$$

представляет собой выражение полного сопротивления в комплексной форме, которое указывает, что для определения вектора напряжения мы должны умножить вектор тока на z , а затем повернуть его на угол

$\varphi = \arctg \frac{x_L}{r}$ против стрелки часов.

Согласно стандарту комплекс полного сопротивления и полной проводимости обозначаются большими буквами, Z и Y без точек, а их абсолютные значения — маленькими буквами z и y .

Если нам дан вектор напряжения, то для определения вектора тока в цепи, состоящей из последовательно включенных активного и индуктивного сопротивления r и $x_L = \omega L$, мы должны разделить напряжение на комплекс полного сопротивления:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\dot{U}}{ze^{j\varphi}} = \dot{U} ye^{-j\varphi} = Y\dot{U} \quad (20,3)$$

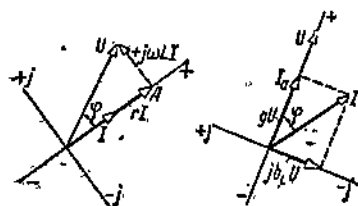
или умножить на проводимость, выраженную в комплексной форме, т. е. на

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx_L} \cdot \frac{r - jx_L}{r - jx_L} = \frac{r}{z^2} - j \frac{x_L}{z^2} = g - jb_L = ye^{-j\varphi}. \quad (20,4)$$

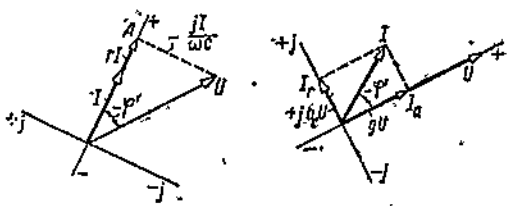
Комплексные выражения полного сопротивления и полной проводимости связаны уравнением

$$ZY = (r + jx_L)(g + jb_L) = ze^{j\varphi} ye^{-j\varphi} = ZY = 1, \quad (20,5)$$

т. е. числовые значения их взаимно обратны, а фазовые углы равны и противоположны.



Фиг. 48. Диаграмма цепи, содержащей r и L .



Фиг. 49. Диаграмма цепи, содержащей r и C .

Если напряжение умножить на комплекс полной проводимости, выраженный в символической форме, мы непосредственно получаем активную и реактивную слагающие тока (фиг. 48):

$$\begin{aligned} i &= Y\dot{U} = g\dot{U} - bj\dot{U} = i_a + i_r, \\ i &= m_I \cdot \overline{OI}; \quad i_a = m_I \cdot \overline{OI_a}; \quad i_r = m_I \cdot \overline{OI_r}. \end{aligned} \quad (20,6)$$

Когда в цепи имеется сопротивление r и емкость C , то внешнее напряжение определяется как сумма активного падения напряжения i_r , совпадающего по фазе с током, и слагающей с амплитудой, равной $\frac{I_m}{\omega C}$ и отстающей от тока на 90° , а потому мы эту слагающую должны умножить на $-j$:

$$\dot{U} = r\dot{I} - j \frac{i}{\omega C} = \left(r - \frac{j}{\omega C}\right) \dot{I} = (r - jx_C) \dot{I} = Z\dot{I}. \quad (20,7)$$

В данном случае комплекс полного сопротивления

$$Z = r - \frac{j}{\omega C} = r - jx_C = \sqrt{r^2 + x_C^2} e^{-j\varphi} = ze^{-j\varphi} \quad (20,8)$$

имеет перед реактивным сопротивлением символ $-j$, а фазовый угол $\varphi = -\varphi' = \arctg \frac{-x_C}{r}$ имеет отрицательное значение.

Если определять ток по напряжению (фиг. 49), то следует разделить напряжение на полное сопротивление или умножить на полную проводимость:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r - jx_C} \cdot \frac{r + jx_C}{r + jx_C} = \frac{r}{z^2} + j \frac{x_C}{z^2} = g + jb_C = ye^{j\varphi'} = Y \quad (20,9)$$

и

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = Y\dot{U} = g\dot{U} + b_C j\dot{U} = \dot{I}_a + \dot{I}_r = m_T \cdot \overline{OI}_a + m_I \cdot \overline{OI}_r. \quad (20,10)$$

В комплексах полного сопротивления и полной проводимости какой-нибудь цепи мнимые части имеют всегда противоположные знаки у j , при этом в случае индуктивности реактанс считается положительным $x = +x_L = \omega L$, а в случае емкости — отрицательным числом: $x = -x_C = \frac{1}{\omega C}$.

В общем случае, когда в цепи имеются и индуктивность и емкость, полное сопротивление и полная проводимость выражаются через

$$Z = r + jx = r + j(x_L - x_C) = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = ze^{j\varphi} = z \angle \varphi, \quad (20,11)$$

$$Y = g - jb = \frac{r}{z^2} - j \frac{x_L - x_C}{z^2} = \frac{r}{z^2} - j \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{z^2} = ye^{-j\varphi} = y \angle -\varphi, \quad (20,12)$$

а ток и напряжение связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= Z\dot{I} = [r + j(x_L - x_C)] \dot{I}; \\ \dot{I} &= Y\dot{U} = [g - j(b_L - b_C)] \dot{U}. \end{aligned} \right\} \quad (20,13)$$

Последнее соотношение между напряжением и током мы могли бы получить также из уравнения напряжений

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{\int i dt}{C},$$

если ток, а также производную и интеграл тока по времени выразить в комплексной форме:

$$i = I_m \sin \omega t; \quad \dot{I} = \frac{I_m e^{j\omega t}}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); \quad \frac{d\dot{I}}{dt} = \frac{j\omega I_m e^{j\omega t}}{\sqrt{2}} = j\omega \dot{I};$$

$$\int i dt = \int \frac{I_m \sin \omega t d(\omega t)}{\omega} = \frac{I_m}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\int \dot{I} dt = \int \frac{I_m e^{j\omega t} dt}{\sqrt{2}} = \frac{1}{j\omega} \int \frac{I_m e^{j\omega t} d(j\omega t)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{I_m e^{j\omega t}}{\sqrt{2}} = \frac{\dot{I}}{j\omega}.$$

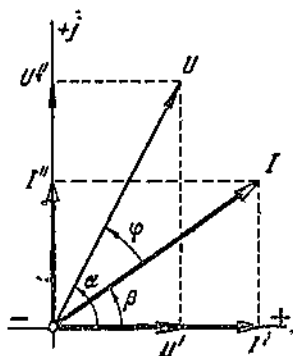
Мы видим, что вектор, представляющий собой производную тока, равен вектору тока, умноженному на ω и повернутому на 90° против стрелки часов, а вектор, представляющий собой интеграл тока, по времени равен этому вектору, деленному на ω и повернутому на 90° по стрелке часов.

Если сложить отдельные слагающие напряжения, действующие в цепи, выраженные в комплексной форме, то мы получим комплекс внешнего напряжения:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= r\dot{i} + L \frac{d\dot{i}}{dt} + \frac{\int \dot{i} dt}{C} = r\dot{i} + j\omega L\dot{i} + \frac{\dot{i}}{j\omega C} = \\ &= \left(r + j\omega L - j \frac{1}{\omega C} \right) \dot{i} = Z\dot{i}.\end{aligned}\quad (20,14)$$

При применении символического метода для представления напряжений и токов, с одной стороны, и полного сопротивления и полной проводимости — с другой — следует помнить, что напряжения и токи меняются в зависимости от времени по закону синуса, сопротивление же и проводимость от времени не зависят. Выражая сопротивление и проводимость через комплексы, мы тем самым только характеризуем сдвиги фаз между напряжением и током в отдельных элементах цепи.

Выше мы символически изображали напряжение и ток через $\dot{U}$ и $\dot{i}$, но если оказывается удобным, мы каждый из этих векторов можем определять через их проекции на две взаимно перпендикулярные оси, или через их числовые значения и угловой множитель, определяющий положение этих векторов на чертеже по отношению к начальной линии (фиг. 50):



Фиг. 50. Проекция векторов на оси действительных и мнимых величин.

$$\dot{U} = m_U \cdot \overline{O\dot{U}} = U' + jU'' = Ue^{ja},$$

$$\dot{i} = m_I \cdot \overline{O\dot{i}} = I' + jI'' = Ie^{j\beta}.$$

По проекциям двух векторов может быть определен и угол между ними:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{U''}{U'} - \frac{I''}{I'}}{1 + \frac{U''I''}{U'I'}} = \frac{U''I' - U'I''}{U'I' + U''I''}.$$

21. Законы Ома и Кирхгофа в символической форме

Символический метод дает возможность в весьма наглядной форме устанавливать соотношения между напряжениями и токами в случае синусоидального их изменения как для простых, так и для разветвленных цепей, применяя основные законы Ома и Кирхгофа в том же виде, как и для постоянного тока.

Закон Ома. Если неразветвленная цепь состоит из ряда последовательно соединенных приемников энергии:

$$Z_1 = r_1 + jx_1 = z_1 e^{j\varphi_1}; \quad Z_2 = r_2 + jx_2 = z_2 e^{j\varphi_2}; \\ Z_3 = r_3 + jx_3 = z_3 e^{j\varphi_3}$$

(где реактансы x_1, x_2, x_3 и соответствующие фазовые углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ могут иметь положительные или отрицательные значения), и если в цепи действуют несколько э. д. с.:

$$\dot{E}_1 = E'_1 + jE''_1; \quad \dot{E}_2 = E'_2 + jE''_2; \quad \dot{E}_3 = E'_3 + jE''_3,$$

то ток в цепи по величине и фазе определяется как отношение суммы э. д. с. к сумме полных сопротивлений, где все величины выражены в комплексной форме:

$$I = I' + jI'' = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = \frac{\sum \dot{E}}{\sum Z} = \\ = \frac{E'_1 + E'_2 + E'_3 + j(E''_1 + E''_2 + E''_3)}{r_1 + r_2 + r_3 + j(x_1 + x_2 + x_3)}, \quad (21,1)$$

а напряжения на концах отдельных элементов составят

$$\dot{U}_1 = U'_1 + jU''_1 = Z_1 I = (r_1 + jx_1)(I' + jI''); \\ \dot{U}_2 = U'_2 + jU''_2 = Z_2 I = (r_2 + jx_2)(I' + jI'').$$

Вычисления с комплексами иногда могут быть упрощены, если вместо алгебраической формы выражать комплекс в виде модуля и соответствующего угла. Определение модуля и угла по действительной и мнимой частям комплекса может быть сделано при помощи счетной линейки. Предположим, требуется определить модуль и угол комплекса $Z = 1,2 + j0,6$. Для этого устанавливаем движок таким образом, чтобы на его лицевой стороне оказались синусная и тангенсная шкалы, и делим меньшее число на большее, т. е. 0,6 на 1,2, ставим волосок бегунка на цифру 6 нижней неподвижной шкалы и затем продвигаем бегунок таким образом, чтобы его левый конец совпадал с цифрой 1,2, тогда волосок бегунка на шкале тангенсов (на подвижной шкале) отсчитает непосредственно угол $\varphi = 26^\circ 30'$. Для определения модуля необходимо 0,6 разделить на $\sin \varphi = \sin 26^\circ 30'$. Обыкновенно шкала синусов так же, как и шкала тангенсов, связана с нижней шкалой. Мы получим модуль, если, оставляя бегунок неподвижным, передвинем подвижную шкалу так, чтобы волосок совпадал с углом $26^\circ 30'$ на шкале синусов, тогда начало (единица) подвижной шкалы на нижней шкале даст значение модуля $z = 1,35$.

Если действительная часть меньше мнимой, например, $Z = 7 + j12$, то опять делим меньшее число 7 на большее число 12, для чего бегунок ставим на меньшее число, отсчитанное на неподвижной шкале, в нашем случае на 7, а левый или правый конец движка на цифру большего числа, в нашем случае левый конец подвижной шкалы на цифру 12 нижней неподвижной шкалы, тогда волосок бегунка отсчитает на подвижной шкале тангенсов угол $30^\circ 15'$, который является дополнительным углом к искомому углу $90^\circ - 30^\circ 15' = 59^\circ 45'$. Модуль же получится, если меньшее число, т. е. 7, разделить на $\cos 59^\circ 15'$ или на синус дополнительного угла, т. е. на синус $30^\circ 15'$. Для этого мы, оставляя бегунок неподвижным, перемещаем подвижную шкалу до тех пор, пока цифра угла $30^\circ 15'$ на шкале синусов не совпадет с волоском бегунка, тогда конец (единица) подвижной шкалы укажет нам значение модуля 13,9.

Первый закон Кирхгофа. Если условно принять за положительное направление переменных токов в ветвях, сходящихся в одной точке,

направление, обращенное к общей точке этих ветвей, то сумма мгновенных значений токов во всех этих ветвях в любой момент должна равняться нулю:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \dots = 0,$$

где $i_1, i_2, i_3, i_4, \dots$ могут быть получены как проекции векторов $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dots$ на какую-нибудь ось, которая может быть выбрана произвольно. Отсюда вытекает, что геометрическая сумма соответствующих векторов токов также должна равняться нулю:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dots = \sum \dot{I} = 0. \quad (21,2)$$

Последнее уравнение является выражением первого закона Кирхгофа для синусоидальных токов в комплексной форме. Если же выбранные положительные направления токов в ветвях, сходящихся в одной точке, имеют разные направления, то сумма векторов притекающих токов должна равняться сумме векторов утекающих токов.

Второй закон Кирхгофа. Для любого момента времени по второму закону Кирхгофа сумма мгновенных значений э. д. с., действующих в каком-нибудь контуре, должна равняться сумме мгновенных значений падения напряжения в отдельных частях этого контура. Мгновенные значения э. д. с. и падения напряжения можно при синусоидальных токах получить как проекции соответствующих векторов. И так как это соотношение должно иметь силу независимо от оси, на которую проектируются векторы, то отсюда следует, что сумма векторов э. д. с. в каком-нибудь контуре должна равняться сумме векторов падения напряжения в отдельных частях этого контура:

$$\sum \dot{E} = \sum Z \dot{I} \quad \text{или} \quad \sum \dot{E} - \sum Z \dot{I} = 0. \quad (21,3)$$

Если положительные направления переменных токов выбрать таким образом, что при обходе контура мы будем проходить какую-нибудь часть контура в направлении, противоположном выбранному положительному направлению тока, то соответствующий вектор тока должен быть взят со знаком минус.

На основании законов Кирхгофа мы можем заменить две параллельные ветви (фиг. 51) с полными сопротивлениями Z_1 и Z_2 одним сопротивлением Z , определяемым из соотношений:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= Z_1 \dot{I}_1 = Z_2 \dot{I}_2, \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{\dot{U}}{Z}, \\ \frac{1}{Z} &= \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}, \quad \text{или} \quad Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \end{aligned} \quad (21,4)$$

Полное сопротивление может быть найдено простым геометрическим построением (фиг. 52). Если последнее соотношение написать в показательной форме, приравняв

$$Z = z e^{j\varphi}; \quad Z_1 = z_1 e^{j\varphi_1}; \quad Z_2 = z_2 e^{j\varphi_2}; \quad Z_1 + Z_2 = Z_a = z_a e^{j\varphi_a}$$

и

$$\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} = \frac{Z_a}{Z_2} = \frac{z_a}{z_2} e^{j(\varphi_a - \varphi_2)} = \frac{Z_1}{Z} = \frac{z_1}{z} e^{j(\varphi_1 - \varphi)},$$

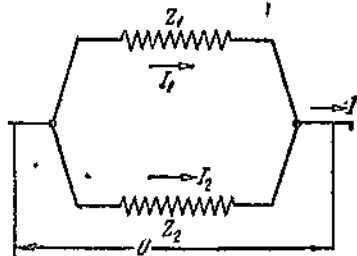
и построить соответствующие комплексы в числовой плоскости в виде отрезков

$$Z_1 = m_Z \cdot \overline{OA}; \quad Z_2 = m_Z \cdot \overline{OB}; \quad Z_1 + Z_2 = Z_a = \\ = m_Z \cdot (\overline{OA} + \overline{OB}) = m_Z \cdot \overline{OC}$$

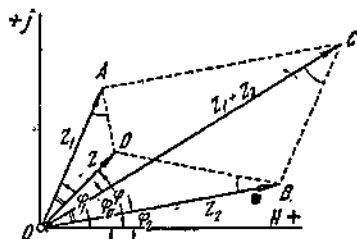
и

$$Z = m_Z \cdot \overline{OD},$$

то из равенства $\frac{z_a}{z_2} = \frac{z_1}{z}$ и $\varphi_a - \varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$ вытекает, что треугольники OCB и OAD подобны, так как они имеют равные углы между пропорциональными сторонами. Поэтому для нахождения Z мы должны на плоскости построить Z_1 , Z_2 и $Z_a = Z_1 + Z_2$ и на стороне $Z_1 = m_Z \cdot \overline{OA}$ построить треугольник с $\angle AOD = \angle COB = \varphi_a - \varphi_2$ и $\angle OAD = \angle OCB = \angle AOC = \varphi_1 - \varphi_a$. Точка пересечения сторон этих углов



Фиг. 51. Параллельное соединение двух ветвей.



Фиг. 52. Графическое нахождение полного сопротивления в случае двух параллельных ветвей.

и даст конец отрезка OD , определяющего искомое полное сопротивление по величине $z = m_Z \cdot OD$ и по фазе $\varphi = \angle DON$.

При параллельном соединении нескольких ветвей для вычислений удобнее пользоваться полными проводимостями вместо полных сопротивлений:

$$i_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = Y_1 \dot{U} = (g_1 - jb_1) \dot{U}; \quad i_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = Y_2 \dot{U} = (g_2 - jb_2) \dot{U};$$

$$i_3 = \frac{\dot{U}}{Z_3} = Y_3 \dot{U} = (g_3 - jb_3) \dot{U},$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dots = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots) \dot{U} = [g_1 + g_2 + g_3 + \dots - j(b_1 + b_2 + b_3 + \dots)] \dot{U} = Y \dot{U},$$

откуда мы получаем, что эквивалентная полная проводимость нескольких параллельных ветвей в комплексной форме равна сумме комплексных проводимостей отдельных ветвей:

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots = \sum Y = \\ = g_1 + g_2 + g_3 + \dots - j(b_1 + b_2 + b_3 + \dots). \quad (21,5)$$

Если отдельные ветви, соединенные параллельно, содержат э. д. с., т. е. если мы имеем несколько источников переменного тока, соединенных параллельно с э. д. с. $\dot{E}_1$, $\dot{E}_2$ и $\dot{E}_3$ и с проводимостями Y_1 , Y_2 и Y_3 , то они могут быть заменены одним источником тока с э. д. с. $\dot{E}$ и внутренней проводимостью $Y = \frac{1}{Z}$, которые определяются следующим образом. Если генераторы не нагружены внешней цепью, то напряжение между общими зажимами равняется э. д. с. $\dot{E}$ и

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = Y_1(\dot{E}_1 - \dot{E}) + Y_2(\dot{E}_2 - \dot{E}) + Y_3(\dot{E}_3 - \dot{E}) = 0,$$

откуда

$$\dot{E} = \frac{Y_1 \dot{E}_1 + Y_2 \dot{E}_2 + Y_3 \dot{E}_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, \quad (21,6)$$

внутренняя проводимость трех источников тока будет равна

$$Y = \frac{1}{Z} = Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}.$$

Задача 14. К напряжению $U = 120$ В присоединены последовательно три элемента:

$$Z_1 = 0,2 + j0,8 \Omega; \quad Z_2 = 0,6 - j0,4 \Omega; \quad Z_3 = 0,4 + j0,2 \Omega.$$

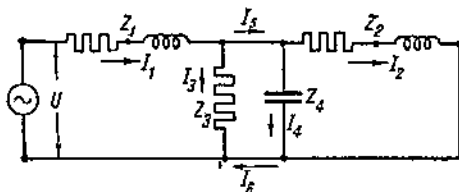
Определить ток и сдвиг фаз между напряжениями на концах первого и второго элементов.

Решение. Направим вектор U по оси действительных значений $\dot{U} = U = 120$ В. Ток в цепи равен

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I' + jI'' = \frac{120}{0,2 + j0,8 + 0,6 - j0,4 + 0,4 + j0,2} \text{ А} = \\ &= \frac{120}{1,2 + j0,6} \cdot \frac{1,2 - j0,6}{1,2 - j0,6} \text{ А} = 80 - j40 \text{ А} = 89,4 \angle -26^\circ 30' \text{ А}, \end{aligned}$$

$\dot{U}_1 = U_1 \angle \varphi_1 = Z_1 \dot{I} = (0,2 + j0,8)(80 - j40) \text{ В} = 48 + j56 \text{ В} = 73,6 \angle 49^\circ 30' \text{ В},$
 $\dot{U}_2 = U_2 \angle \varphi_2 = Z_2 \dot{I} = (0,6 - j0,4)(80 - j40) \text{ В} = 32 - j56 \text{ В} = 64,5 \angle -60^\circ 20' \text{ В}.$
 Искомый угол равен

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 49^\circ 30' - (-60^\circ 20') = 109^\circ 50'.$$



Фиг. 53.

Задача 15. Определить токи для отдельных элементов цепи, соединенных по схеме фиг. 53, когда $\dot{U} = 120$ В;

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + j4 \Omega; \\ Z_2 &= 6 + j2 \Omega; \\ Z_3 &= 100 \Omega; \\ Z_4 &= -j20 \Omega. \end{aligned}$$

Решение. Намечаем направление токов в отдельных элементах цепи (см. схему). Направляем вектор $\dot{U}$ по действительной оси $\dot{U} = U = 120$ В, составляем пять уравнений (шестое не нужно, т. к. $I_5 = I_3$):

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_3 + \dot{I}_5 & \dot{I}_1 &= \dot{I}_3 + \dot{I}_5 \\ \dot{I}_5 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_4 & \dot{I}_5 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_4 \\ \dot{U} &= Z_1 \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_3 & \dot{U} &= Z_1 \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_3 \\ 0 &= 0 \cdot \dot{I}_5 + Z_4 \dot{I}_4 - 0 \dot{I}_5 - Z_3 \dot{I}_3 & 0 &= Z_4 \dot{I}_4 - Z_3 \dot{I}_3 \\ 0 &= Z_2 \dot{I}_2 - Z_4 \dot{I}_4 & 0 &= Z_2 \dot{I}_2 - Z_4 \dot{I}_4 \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получаем

$$i_1 = \frac{\dot{U}(Z_1 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4)}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4} = \\ = \frac{120[(6+j2)100 + (6+j2)(-j20) + 100(-j20)]}{(1+j4)(6+j2)100 + (1+j4)(6+j2)(-j20) + (1+j4)100(-j20) + (6+j2)100(-j20)} \text{ A} = \\ = 12,7 - j7,04 \text{ A} = 14,5 \angle -29^\circ \text{ A}.$$

$$i_2 = \frac{\dot{U} - Z_1 i_1}{Z_2} = \frac{120 - (1+j4)(12,7 - j7,04)}{6+j2} \text{ A} = \\ = 9,72 - j10,56 \text{ A} = 14,4 \angle -47^\circ 20' \text{ A};$$

$$i_3 = \frac{\dot{U} - Z_1 i_1}{Z_3} = \frac{120 - (1+j4)(12,7 - j7,04)}{100} \text{ A} = \\ = 0,79 - j0,44 \text{ A} = 0,9 \angle -29^\circ 50' \text{ A};$$

$$i_5 = i_1 - i_3 = (12,7 - j7,04) - (0,79 - j0,44) \text{ A} = \\ = 11,91 - j6,6 \text{ A} = 13,6 \angle -29^\circ \text{ A};$$

$$i_4 = i_2 - i_3 = (9,72 - j10,56) - (0,79 - j0,44) \text{ A} = \\ = 2,19 + j3,96 \text{ A} = 4,4 \angle +61^\circ \text{ A};$$

$$i_6 = i_3 - i_1 = (0,79 - j0,44) - (12,7 - j7,04) \text{ A} = \\ = -11,91 + j6,6 = 13,6 \angle +151^\circ \text{ A}.$$

22. Мощность в комплексной форме

Мгновенная мощность переменного тока определяется как произведение мгновенных значений напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$ и тока $i = I_m \sin(\omega t + \beta)$

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2} \{\cos(\alpha - \beta) - \cos[2\omega t + (\alpha + \beta)]\} = \\ = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi),$$

она колеблется около своего среднего значения $UI \cos \varphi$ с двойной частотой. Если вместо произведения мгновенных значений напряжения и тока взять произведение их комплексов

$$\dot{U}\dot{I} = Ue^{ja}Ie^{j\beta} = UIe^{j(a+\beta)} = UI \cos(\alpha + \beta) + jUI \sin(\alpha + \beta),$$

то полученное произведение ни в своей действительной, ни в своей мнимой части не дает того, что могло бы быть использовано для определения мощности.

Однако если взять комплексные выражения напряжения и тока $U = U' + jU'' = Ue^{ja}$, $I = I' + jI'' = Ie^{j\beta}$ и в одном из них изменить знак у мнимой части, например, в комплексе напряжения, т. е. вместо комплекса напряжения взять его сопряженный комплекс (сопряженный комплекс мы обозначаем через звездочку наверху) и перемножить соответствующие комплексы:

$$\dot{P}_i = \dot{U}\dot{I} = (U' - jU'')(I' + jI'') = U'I' + U''I'' - j(U''I' - U'I'')$$

или

$$\dot{P}_i = \dot{U}\dot{I} = Ue^{-ja}Ie^{j\beta} = UIe^{-j(a-\beta)} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi,$$

то действительная часть произведения дает значение активной мощности, а коэффициент при j — реактивную мощность, так как $I \cos \varphi = I_a$ и $I \sin \varphi = I_r$ представляют собой активные и реактивные слагающие тока по отношению к напряжению:

$$\dot{P}_i = \dot{U} \dot{I} = UI_a - jUI_r = P_a - jP_r. \quad (22,1)$$

Если реактивная мощность обусловлена емкостью, например, когда нагрузка определяется работой синхронного двигателя, то ток опережает напряжение $\beta > \alpha$ и угол φ имеет отрицательное значение. В этом случае реактивная мощность P_r будет положительна.

Можно было бы получить выражения активной и реактивной мощностей умножением комплекса напряжения на сопряженный комплекс тока:

$$\begin{aligned} \dot{P}_i = \dot{U} \dot{I} &= (U' + jU'')(I' - jI'') = U'I' + U''I'' + j(U''I' - U'I'') = \\ &= Ue^{j\alpha} Ie^{-j\beta} = UIe^{j(\alpha-\beta)} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P_a + jP_r \end{aligned}$$

в этом случае, наоборот, реактивная мощность для индуктивной нагрузки должна приниматься как величина положительная, а для емкостной нагрузки как отрицательная величина.

Вместо стандартных обозначений P_a и P_r весьма часто применяется также обозначение для активной мощности P , а для реактивной Q .

Задача 16. Определить напряжения, мощности и коэффициенты мощности для отдельных элементов цепи, соединенных по схеме фиг. 53 по данным задачи 15.

Решение.

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= U - Z_1 \dot{I}_1 = 120 - (1 + j4)(12,7 - j7,04) \text{ В} = \\ &= 79,14 - j43,76 \text{ В} = 90,4 \angle -2^\circ 50' \text{ В}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{U}_1 \dot{I}_1 = 120(12,7 - j7,04) \text{ Вт} = 1,53 - j0,845 \text{ кВт}; \\ \cos \varphi &= \cos 29^\circ = 0,875, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_2 &= \dot{U}_2 \dot{I}_2 = (79,14 + j43,76)(9,72 - j10,56) \text{ Вт} = 1,23 - j0,41 \text{ кВт}, \\ \cos \varphi_2 &= \cos 18^\circ 30' = 0,95. \end{aligned}$$

23. Нахождение распределения токов в сложных цепях

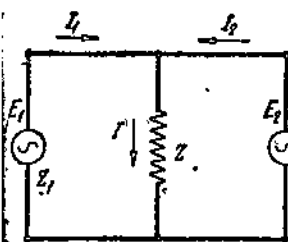
При определении напряжений и токов в разветвленных цепях переменного тока применимы те же методы, что и в случае постоянного тока, как-то: метод наложения, метод Гельмгольца-Тевенена, метод трансформации треугольника в звезду и т. п. Особенность применения этих методов при переменном токе заключается в том, что при решении соответственно составленных уравнений вместо символического обозначения напряжений и токов мы должны подставить выражения этих напряжений и токов в виде комплексов проекций их векторов на две взаимно перпендикулярные оси, а вместо символического обозначения полного сопротивления или проводимости отдельных элементов их активные и реактивные слагающие в комплексной форме. После освобождения от мнимых множителей в знаменателях и приведения обеих

сторон уравнения к однородному виду, мы на основании того, что действительные и мнимые части обеих сторон уравнения должны быть порознь равны между собой, получаем, что каждое уравнение, написанное в комплексной форме, представляет собой по существу два уравнения.

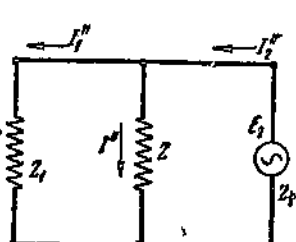
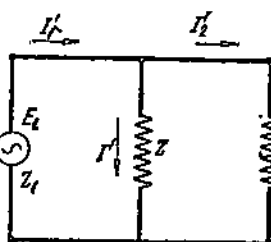
Рассмотрим применение метода наложения на конкретной схеме (фиг. 54).

Пусть два источника переменного тока с э. д. с. $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ и с внутренними сопротивлениями Z_1 и Z_2 питают общую ветвь, полное сопротивление которой Z .

В общем случае для любого числа э. д. с. значение тока в каждой ветви составляется из суммы значений тех токов, которые получались бы в этой ветви, если каждая из э. д. с. рассматриваемой системы (или схемы) действовала независимо от других. Для нахождения значе-



Фиг. 54. Цепь с двумя э. д. с.



Фиг. 55 и 56. Суперпозиция действия двух э. д. с.

ния тока в какой-нибудь ветви мы должны сначала определить токи для того случая, когда действует только первая э. д. с. $\dot{E}_1$, другие же э. д. с. равны нулю, затем определить распределение токов, когда действует лишь э. д. с. $\dot{E}_2$, а остальные равны нулю.

При этом, считая каждый раз все э. д. с. за исключением одной равными нулю, мы должны оставлять во всех ветвях все сопротивления, в том числе и внутренние сопротивления источников тока, дающих э. д. с. На фиг. 55 и 56 вычерчены схемы, которые получаются, если мы одну из э. д. с. приравниваем нулю.

Когда действует только э. д. с. $\dot{E}_1$ (фиг. 55), ток в Z_1 выразится через

$$\dot{I}'_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + \frac{ZZ_2}{Z+Z_2}} = \frac{(Z+Z_2)\dot{E}_1}{ZZ_1 + Z_1Z_2 + Z_2Z},$$

который распределяется между ветвями Z и Z_2 обратно пропорционально сопротивлениям этих ветвей:

$$\dot{i}' = \frac{Z_2\dot{E}_1}{ZZ_1 + Z_1Z_2 + Z_2Z} \quad \text{и} \quad \dot{i}'_2 = \frac{Z\dot{E}_1}{ZZ_1 + Z_1Z_2 + Z_2Z}.$$

Если будет действовать только э. д. с. $\dot{E}_2$ (фиг. 56), то токи в ветвях Z_2 , Z и Z_1 будут равны

$$i_2'' = \frac{\dot{E}_2}{Z_2 + \frac{ZZ_1}{Z+Z_1}} = \frac{(Z+Z_1)\dot{E}_2}{ZZ_1 + Z_1Z_2 + Z_2Z};$$

$$i'' = \frac{Z_1\dot{E}_2}{ZZ_1 + Z_1Z_2 + Z_2Z}; \quad i_1'' = \frac{Z\dot{E}_2}{ZZ_1 + Z_1Z_2 + Z_2Z}.$$

Учитывая выбранные нами в схемах *a*, *b* и *c* направления токов и складывая полученные значения токов, мы найдем

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_1' - i_1'' = \frac{(Z+Z_2)\dot{E}_1 - Z\dot{E}_2}{ZZ_1 + Z_1Z_2 + Z_2Z}; \\ i_2 &= i_2'' - i_2' = \frac{(Z+Z_1)\dot{E}_2 - Z\dot{E}_1}{ZZ_1 + Z_1Z_2 + Z_2Z}; \\ i &= i' + i'' = \frac{Z_2\dot{E}_1 + Z_1\dot{E}_2}{ZZ_1 + Z_1Z_2 + Z_2Z}. \end{aligned} \right\} \quad (23,1)$$

Метод Гельмгольца-Тевенена, иногда весьма значительно упрощающий нахождение напряжения и тока в какой-нибудь ветви разветвленной цепи, заключается в том, что мы рассматриваем всю остальную часть системы за исключением этой ветви как источник энергии со сложным внутренним сопротивлением и нагруженный рассматриваемой ветвью.

Через U мы обозначим напряжение между точками системы, к которым в схеме присоединяется эта ветвь при условии, что она перед этим была бы отключена, т. е. напряжение у зажимов источника тока при отсутствии нагрузки (при холостом ходе). Ток при нагрузке такого источника тока рассматриваемой ветвью может быть выражен через $i = \frac{U}{Z + Z_k}$, где Z_k есть как бы внутреннее сопротивление этого сложного источника тока.

Значение этого сопротивления Z_k определяется как сопротивление всей системы между точками присоединения рассматриваемой ветви, если все э. д. с., действующие в системе, приравнять нулю. Это сопротивление можно было бы измерить и опытным путем, если сначала измерить напряжение между соответствующими точками присоединения ветви, когда цепь этой ветви разомкнута, а затем измерить ток в этой ветви, когда сопротивление ее будет коротко замкнуто:

$$\left(i_k = \frac{U}{0 + Z_k}, \quad Z_k = \frac{U}{i_k} \right)$$

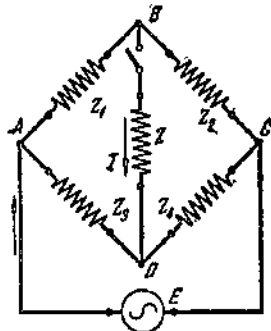
(доказательство этого метода см. том I, § 13).

Применим этот метод к определению тока в перемычке мостика Уитстона (фиг. 57). Для этого удалим сначала сопротивление в ветви *BD* и определим напряжение между точками *B* и *D* (фиг. 58).

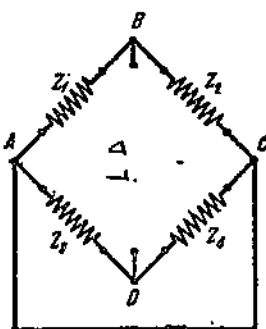
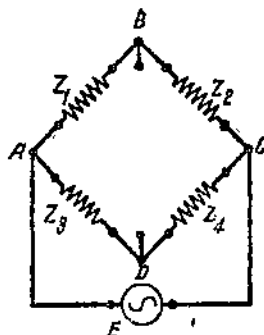
Если между точками A и C присоединена э. д. с. $\dot{E}$, то напряжение между B и C равняется $\dot{U}_{BC} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{E}$, а между точками D и C оно равно $\dot{U}_{DC} = \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \dot{E}$, а поэтому напряжение между точками B и D составляет

$$\begin{aligned}\dot{U} = \dot{U}_{BD} &= \dot{U}_{BC} - \dot{U}_{DC} = \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \right) \dot{E} = \\ &= \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)} \dot{E}.\end{aligned}$$

Внутреннее сопротивление системы Z_h (между точками B и D) состоит, как видно из фиг. 59, из двух последовательно соединенных



Фиг. 57. Применение метода холостого хода к мосту Уитстона.



Фиг. 58 и 59. Применение метода холостого хода и короткого замыкания к мосту Уитстона.

групп, первая состоит из параллельно соединенных сопротивлений Z_1 и Z_2 (точки A и C коротко соединены), а вторая — из параллельно соединенных сопротивлений Z_3 и Z_4 , поэтому

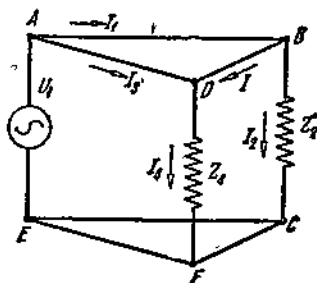
$$Z_h = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4} = \frac{Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4) + Z_3 Z_4 (Z_1 + Z_2)}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}. \quad (23,2)$$

Подставляя полученные значения U и Z_h в уравнение, получаем таким, сравнительно простым, образом искомый ток в перемычке

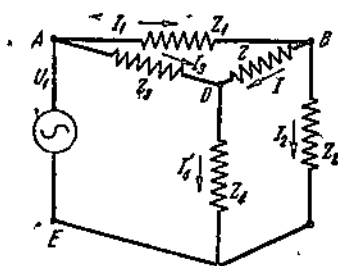
$$i = \frac{(Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4) \dot{E}}{Z (Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4) + Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4) + Z_3 Z_4 (Z_1 + Z_2)}. \quad (23,3)$$

Задача 17. Два потребителя (фиг. 60) BC и DF , которые могут быть заменены сопротивлениями $Z_3 = 2,5 \Omega$ и $Z_4 = 0,8 + j0,6 \Omega$, питаются от общего источника тока, дающего напряжение $U_s = 220$ В, через две двухпроводные линии. Линия AB, CE имеет длину $l_1 = 100$ м, линия AD, FE — длину $l_2 = 80$ м. Кроме того, оба потребителя соединены между собой линией BD, CF длиной $l = 40$ м. Все линии состоят из медных проводов одного сечения $S = 70$ мм². Определить распределение токов, напряжения у потребителей, мощности и коэффициенты мощностей источника тока и потребителей в предположении, что в линиях мы имеем лишь активное падение напряжения.

Решение. Распределение токов и напряжения у потребителей не изменяется, если мы для удобства будем считать, что верхние провода имеют двойное сопротивление, а сопротивление нижних проводов равно нулю. Это позволяет нам соединить точки CFE в один узел и привести заданную схему к схеме мостика Уитстона (фиг. 61). Сопротивление 1 м двухпроводной линии равняется $\frac{2}{57 \cdot 70} \frac{\Omega}{\text{м}} \approx 0,0005 \frac{\Omega}{\text{м}}$, а сопротивления линии AB $z_1 = 0,0005 \cdot 100 \Omega = 0,05 \Omega$, линии AD $z_2 = 0,0005 \cdot 80 \Omega = 0,04 \Omega$, а соединительной линии BD $z = 0,0005 \cdot 40 \Omega = 0,02 \Omega$.



Фиг. 60. К задаче 17.



Фиг. 61. К задаче 17.

Определим сначала ток в линии BD (в перемычке), для чего воспользуемся последней формулой (23,3):

$$I' = \frac{[2,5 \cdot 0,04 - 0,02(0,05 + 2,5)(0,04 + 0,8 + j0,6) + 0,05 \cdot 2,5(0,04 + 0,8 + j0,6) + 0,05(0,8 + j0,6)] 220}{+ 0,04(0,8 + j0,6)(0,05 + 2,5)} A = 23,9 - j46,2 A = 52,0 \angle -62^\circ 45' A.$$

Для узла B мы имеем

$$i_1 = i + i_2,$$

а для контура ABCE

$$U_1 = Z_1 i_1 + Z_2 i_2 = Z_1 i + Z_1 i_2 + Z_2 i_2,$$

откуда

$$i_2 = \frac{U_1 - Z_1 i}{Z_1 + Z_2} = \frac{220 - 0,05(23,9 - j46,2)}{0,05 + 2,5} A = 86,0 + j0,905 A = 86 \angle 0^\circ 37' A.$$

$$i_1 = i + i_2 = 23,9 - j46,2 + 86 + j0,905 A = 109,9 + j45,3 A = 118 \angle -22^\circ 25' A;$$

для определения i_3 рассмотрим контур ABD, для которого

$$Z_1 i_1 + Z i - Z_3 i_3 = 0$$

или

$$i_3 = \frac{Z_1 i_1 + Z i}{Z_3} = \frac{0,05(109,9 - j45,3) + 0,02(23,9 - j46,2)}{0,04} A = 149 - j80 A = 169,1 \angle -28^\circ 20' A;$$

$$i_4 = i + i_3 = 23,9 - j46,2 + 149 - j80 A = 172,9 - j126,2 A = 214 \angle -36^\circ 35' A;$$

$$i_5 = i_1 + i_3 = 109,9 - j45,3 + 149 - j80 A = 258,9 - j125,3 A = 288 \angle -25^\circ 58' A;$$

$$\dot{U}_{BE} = Z_2 \dot{I}_2 = 2,5 (86 + j 0,905) \text{ В} = 215,0 + j 2,26 \text{ В} = 215,2 \angle 0^\circ 37' \text{ В};$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{DE} &= \dot{U}_1 - Z_3 \dot{I}_3 = 220 - 0,04 (149 - j 80) \text{ В} = 214 + j 3,2 \text{ В} = \\ &= 214,2 \angle 0^\circ 52' \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\cos \varphi_3 = 1; \cos \varphi_4 = \cos \angle (\dot{U}_{DE}, \dot{I}_4) = \cos (52^\circ + 36^\circ 35') = 0,79;$$

$$\cos \varphi_0 = \cos \angle (\dot{U}_1, \dot{I}_0) = \cos 25^\circ 50' = 0,9;$$

$$P_2 = U_{BE} I_2 \cos \varphi_2 = 215,2 \cdot 86 \text{ Вт} = 1,85 \text{ кВт};$$

$$P_4 = U_{DE} I_4 \cos \varphi_4 = 214,2 \cdot 214 \cdot 0,79 \text{ Вт} = 3,62 \text{ кВт};$$

$$P_0 = U_1 I_0 \cos \varphi_0 = 220 \cdot 288 \cdot 0,9 \text{ Вт} = 5,7 \text{ кВт}.$$

В проводах теряется

$$5,7 - 1,85 - 3,62 \text{ кВт} = 0,23 \text{ кВт}.$$

Задача 18. Две синхронных машины с э. д. с. $\dot{E}_1 = 540 \text{ В}$ и $\dot{E}_2 = 600 \angle -30^\circ \text{ В}$ с приведенными полными сопротивлениями $Z_1 = r_1 + jx_1 = 0,04 + j0,2 \Omega$ и $Z_2 = r_2 + jx_2 = 0,06 + j0,24 \Omega$ работают на общие шины, к которым присоединен еще приемник энергии с сопротивлением $Z = r + jx = 1 + j0,75 \Omega$. Определить напряжение на шинах, токи, мощности и $\cos \varphi$ обеих машин и нагрузки. Для решения этой задачи воспользуемся выведенными уравнениями:

$$\dot{E}_2 = 600 \angle -30^\circ = 600 [\cos 30^\circ - j \sin 30^\circ] = 520 - j 300 \text{ В};$$

$$\begin{aligned} [ZZ_1 + Z_1 Z_2 + Z_2 Z]^{-1} &= [(1 + j 0,75) (0,04 + j 0,2) + (0,04 + j 0,2) (0,06 + j 0,24) + \\ &+ (0,06 + j 0,24) (1 + j 0,75)]^{-1} \frac{1}{\Omega^2} = -0,758 - j 1,48 \frac{1}{\Omega^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= [(1 + j 0,75 + 0,06 + j 0,24) 540 - (1 + j 0,75) (520 - j 300)] (-0,758 - \\ &- j 1,48) \text{ А} = 789 - j 81 \text{ А} = 793 \angle -6^\circ \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= [(1 + j 0,75 + 0,04 + j 0,2) (520 - j 300) - (1 + j 0,75) 540] (-0,758 - \\ &- j 1,48) \text{ А} = -547 - j 254 \text{ А} = 603 \angle -156^\circ \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 789 - j 81 - 547 - j 254 \text{ А} = 242 - j 335 \text{ А} = 413 \angle -54^\circ 10' \text{ А};$$

$$\dot{U}_{AB} = Z \dot{I} = (1 + j 0,75) (242 - j 335) \text{ В} = 493 - j 153,5 \text{ В} = 516 \angle -17^\circ 10' \text{ В};$$

$$\cos \varphi_1 = \cos \angle (\dot{E}_1, \dot{I}_1) = \cos [0^\circ - (-6^\circ)] = \cos 6^\circ = 0,995;$$

$$\cos \varphi_2 = \cos \angle (\dot{E}_2, \dot{I}_2) = \cos 125^\circ = -0,574;$$

$$\cos \varphi = \cos \angle (\dot{U}_{AB}, \dot{I}) = \cos 37^\circ = 0,8;$$

$$P_1 = E_1 I_1 \cos \varphi_1 = 540 \cdot 793 \cdot 0,995 \text{ Вт} = 425 \text{ кВт};$$

$$P_2 = E_2 I_2 \cos \varphi_2 = 600 \cdot 603 \cdot (-0,574) \text{ Вт} = -208 \text{ кВт};$$

$$P = U_{AB} I \cos \varphi = 516 \cdot 413 \cdot 0,8 \text{ Вт} = 170 \text{ кВт}.$$

Потери в сопротивлениях генераторов

$$r_1 I_1^2 = 0,04 \cdot 793^2 \text{ Вт} = 25 \text{ кВт}, r_2 I_2^2 = 0,06 \cdot 603^2 \text{ Вт} = 22 \text{ кВт}.$$

Проверяем правильность полученных результатов:

$$P_1 + P_2 = P + r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2; 425 - 208 = 170 + 25 + 22 \text{ кВт}.$$

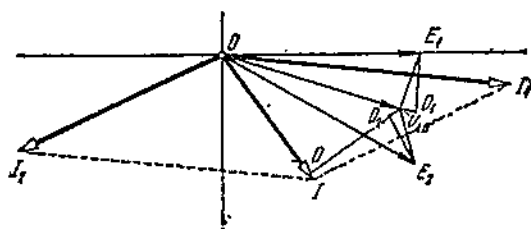
На векторной диаграмме (фиг. 62) в масштабе вычерчены векторы напряжений и токов:

$$\dot{E}_1 = m_U \cdot \overrightarrow{OE_1}; \dot{E}_2 = m_U \cdot \overrightarrow{OE_2}; \dot{U}_{AB} = m_U \cdot \overrightarrow{OU_{AB}};$$

$$\dot{I}_1 = m_I \cdot \overrightarrow{OI_1}; \dot{I}_2 = m_I \cdot \overrightarrow{OI_2}; \dot{I} = m_I \cdot \overrightarrow{OI}.$$

Кроме того, на этой диаграмме показаны векторы падения напряжения у потребителя и в машинах

$$\begin{aligned} r\dot{I} &= m_U \cdot \overline{OD}; \quad jx\dot{I} = m_U \cdot \overline{DU}_{AB}; \quad Z\dot{I} = m_U \cdot \overline{OU}_{AB}; \\ r_1\dot{I}_1 &= m_U \cdot \overline{U}_{AB}D_1; \quad jx_1\dot{I}_1 = m_U \cdot \overline{D_1E_1}; \quad Z_1\dot{I}_1 = m_U \cdot \overline{U}_{AB}E_1; \\ r_2\dot{I}_2 &= m_U \cdot \overline{U}_{AB}D_2; \quad jx_2\dot{I}_2 = m_U \cdot \overline{D_2E_2}; \quad Z_2\dot{I}_2 = m_U \cdot \overline{U}_{AB}E_2. \end{aligned}$$



Фиг. 62. К задаче 18.

рой машины больше э. д. с. первой машины. При параллельной работе двух синхронных машин независимо от значения их э. д. с. отстающая по фазе машина всегда меньше нагружается и при большом отставании работает как мотор.

Из диаграммы видно, что угол между E_2 и I_2 больше 90° , т. е. что ток и напряжение во второй машине большую часть периода направлены в противоположные стороны. Это указывает на то, что вторая машина не отдает мощности шинам, а получает мощность от шин, т. е. что вторая машина работает не как генератор, а как мотор, несмотря на то, что э. д. с. вто-

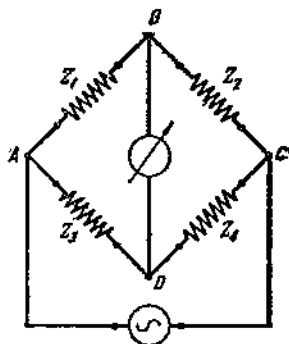
24. Мостик Уитстона при переменном токе

Мостик Уитстона, составленный из четырех сопротивлений:

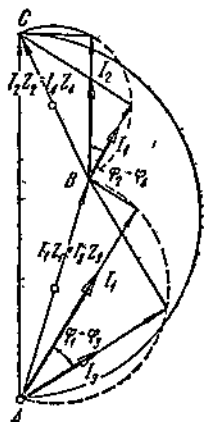
$$Z_1 = z_1 e^{j\varphi_1}, \quad Z_2 = z_2 e^{j\varphi_2}, \quad Z_3 = z_3 e^{j\varphi_3}, \quad Z_4 = z_4 e^{j\varphi_4},$$

образующих замкнутый четырехугольник (фиг. 63), в одну диагональ которого включается источник переменного тока, а в другую — прибор, устанавливающий отсутствие тока (телефон, электродинамометр или вибрационный гальванометр), может быть применен для опытного определения индуктивностей и емкостей. При отсутствии тока в диагонали BD между точками B и D не должно быть напряжения. Это наступит, когда падения напряжения между точками A и B и между точками A и D , с одной стороны, и между точками B и C и точками C и D — с другой, будут равны между собой по величине и фазе, т. е. когда $Z_1\dot{I}_1 = Z_3\dot{I}_3$ и $Z_2\dot{I}_2 = Z_4\dot{I}_4$.

Так как благодаря отсутствию тока в ветви BD токи $\dot{I}_1 = \dot{I}_2$ и $\dot{I}_3 = \dot{I}_4$, то, деля одно уравнение на другое, мы находим $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$, или $\frac{z_1}{z_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{z_3}{z_4} e^{j(\varphi_3 - \varphi_4)}$, откуда следует, что для того, чтобы мостик находился в равновесии, необходимо,



Фиг. 63. Мостик Уитстона.



Фиг. 64. Векторная диаграмма мостика Уитстона.

чтобы числовые значения полных сопротивлений четырех ветвей составляли пропорцию и чтобы, кроме того, разности углов сдвига в двух прилегающих ветвях мостика были равны между собой:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_3}{z_4} \text{ и } \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4, \text{ или } \varphi_1 - \varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_4.$$

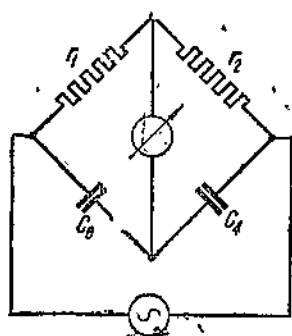
Если построить для мостика Уитстона векторную диаграмму (фиг. 64), то векторы падения напряжений в ветвях, сходящихся в точках *A* и *C* совпадают:

$$m_U \cdot \overline{AB} = \dot{U}_{AB} = Z_1 \dot{I}_1 = \dot{U}_{AD} = Z_3 \dot{I}_3$$

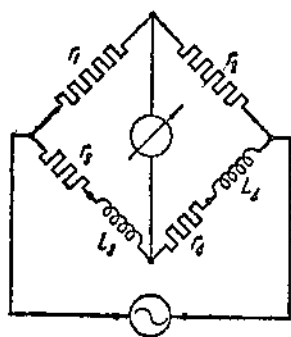
и

$$m_U \cdot \overline{BC} = \dot{U}_{BC} = Z_2 \dot{I}_2 = \dot{U}_{BD} = Z_4 \dot{I}_4,$$

а углы, образованные направлениями токов, дают значения разностей углов $\varphi_1 - \varphi_3$ и $\varphi_2 - \varphi_4$.



Фиг. 65. Измерение емкости мостиком Уитстона.



Фиг. 66. Мостик Уитстона для измерения индуктивностей.

Если в двух смежных ветвях включены активные сопротивления

$$Z_1 = r_1 \text{ и } Z_2 = r_2, \text{ т. е. } \varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$

то в двух других ветвях должны быть включены однородные сопротивления, например, два активных сопротивления ($\varphi_3 = \varphi_4 = 0$) или индуктивности (φ_3 и φ_4 — положительны) или же емкости (φ_3 и φ_4 — отрицательны). Наоборот, если активные сопротивления включены в противоположных ветвях мостика, например $Z_1 = r_1$ и $Z_4 = r_4$, т. е. $\varphi_1 = \varphi_4 = 0$, то в остальных противоположных ветвях должны быть включены: в одной — индуктивность, а в другой — емкость, так как только при этих условиях φ_1 и φ_3 могут иметь противоположные знаки и может быть достигнуто равновесие в мостике.

Так, например, если сравнивается неизвестная емкость C_3 с эталонной емкостью (фиг. 65), то в две смежные ветви включаются активные сопротивления: $Z_1 = r_1$ и $Z_2 = r_2$, а в две другие соседние ветви включаются емкости $Z_3 = -j \frac{1}{\omega C_3}$ и $Z_4 = -j \frac{1}{\omega C_4}$. При равновесии $Z_1 : Z_2 = Z_3 : Z_4$, или $r_1 : r_2 = \frac{-j}{\omega C_3} : \frac{-j}{\omega C_4} = C_4 : C_3$, откуда $C_3 = C_4 \frac{r_2}{r_1}$.

емкости обратно пропорциональны сопротивлениям. Если известны C_4 , r_2 и r_1 , то можно вычислить C_3 .

При сравнении индуктивностей катушек, которые всегда имеют активное сопротивление, должна быть применена схема фиг. 66. В этом случае сопротивления ветвей будут

$$Z_1 = r_1; Z_2 = r_2; Z_3 = r_3 + j\omega L_3 \text{ и } Z_4 = r_4 + j\omega L_4.$$

Равновесие будет достигнуто, когда

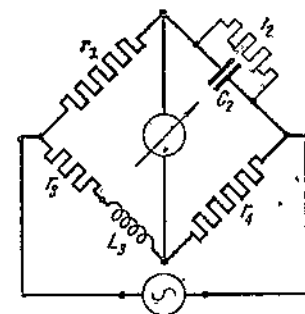
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3 + j\omega L_3}{r_4 + j\omega L_4}; r_1 r_4 + j\omega L_4 r_1 = r_2 r_3 + j\omega L_3 r_2$$

или когда

$$r_1 r_4 = r_2 r_3 \text{ и } j\omega L_4 r_1 = j\omega L_3 r_2,$$

откуда мы получаем условия равновесия мостика, а именно одновременно должно быть удовлетворено равенство трех отношений: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4} = \frac{L_3}{L_4}$.

Чтобы определить неизвестную индуктивность L_3 через эталонную индуктивность L_4 , предварительно уравнивают мостик при постоянном токе так, чтобы $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}$, а затем при переменном токе, не меняя r_1 и r_3 , меняют одновременно r_2 и r_4 так, чтобы сохранялась пропорция $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}$, пока мостик не уравнивается. Искомая индуктивность будет равна $L_3 = L_4 \frac{r_3}{r_4} = L_4 \frac{r_1}{r_2}$.



Фиг. 67. Сравнение емкости и индуктивности, мостиком Уитстона.

Когда же при помощи мостика Уитстона сравниваются емкость и индуктивность, то последние должны быть включены в противоположные ветви (фиг. 67). При этом параллельно к емкости должно быть включено активное сопротивление, чтобы мостик мог быть уравновешен. Полные сопротивления ветвей выражаются через

$$Z_1 = r_1; Z_2 = \frac{r_2 \cdot \left(-\frac{j}{\omega C_2} \right)}{r_2 - \frac{j}{\omega C_2}} = \frac{r_2}{1 + j\omega C_2 r_2};$$

$$Z_3 = r_3 + j\omega L_3 \text{ и } Z_4 = r_4.$$

Подставляем выражения полных сопротивлений в уравнение $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$, характеризующее равновесие мостика:

$$r_1 r_4 = \frac{r_2 (r_3 + j\omega L_3)}{1 + j\omega C_2 r_2},$$

или

$$r_1 r_4 + j\omega C_2 r_1 r_2 r_4 = r_2 r_3 + j\omega L_3 r_2.$$

Приравняв порознь действительные и мнимые части, мы получаем

$$r_1 r_4 = r_2 r_3 = \frac{L_3}{C_2};$$

И здесь поступают таким же образом, как и выше: сначала уравнивают мостик при постоянном токе, добиваясь равенства $r_1 r_4 = r_2 r_3$, а затем при переменном токе, сохраняя отношения $\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4}$, меняют одновременно r_2 и r_4 , пока мостик не уравнивается.

25. Мостик Шеринга

Метод мостика Уитстона может быть применен также для определения емкости и потерь (мощности) в диэлектриках конденсаторов при высоком напряжении. По схеме, предложенной Шерингом, в одну ветвь мостика Уитстона включают активное сопротивление $Z_1 = r_1$, в противоположную — воздушный конденсатор известной емкости без потерь: $Z_4 = -j \frac{1}{\omega C_4}$.

Исследуемый же конденсатор, который может быть представлен как идеальный конденсатор без потерь с емкостью C_2 , параллельно к которому включено сопротивление r_2 , включают, как и сопротивление r_3 с параллельно присоединенной к нему проградированной переменной емкостью C_3 , в две другие противоположные ветви (фиг. 68).

Полные сопротивления соединенных параллельно емкости и активного сопротивления могут быть выражены следующим образом:

$$Z_2 = \frac{r_2 (-j \frac{1}{\omega C_2})}{r_2 - j \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{r_2}{1 + j \omega C_2 r_2} \quad \text{и} \quad Z_3 = \frac{r_3}{1 + j \omega C_3 r_3}.$$

Подставляя значения полных сопротивлений в уравнение равновесия $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$, мы получаем, что

$$\frac{-j r_1}{\omega C_4} = \frac{r_2 r_3}{(1 + j \omega C_2 r_2)(1 + j \omega C_3 r_3)},$$

или

$$r_2 r_3 \omega C_4 = -j r_1 [1 - \omega^2 C_2 r_2 C_3 r_3 + j (\omega C_2 r_2 + \omega C_3 r_3)],$$

это уравнение путем отделения действительных величин от мнимых распадается на два: $r_2 r_3 \omega C_4 = (\omega C_2 r_2 + \omega C_3 r_3) r_1$ и $1 = \omega^2 C_2 r_2 C_3 r_3$.

Из этих двух уравнений без труда определяется неизвестное сопротивление утечки $r_2 = \frac{r_1 (1 + \omega^2 C_3^2 r_3^2)}{\omega^2 C_2 C_4 r_3^2}$.

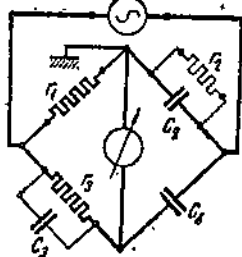
Величина $\omega^2 C_3^2 r_3^2$ обыкновенно ничтожно мала по сравнению с единицей, и потому искомое сопротивление r_2 может быть представлено в виде

$$r_2 \approx \frac{r_1}{\omega^2 C_2 C_4 r_3^2}.$$

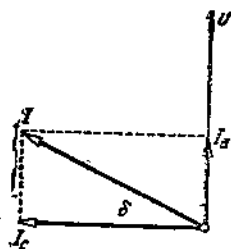
Из тех же двух уравнений находим неизвестную емкость C_2 :

$$C_2 = \frac{C_4 r_3}{r_1 (1 + \omega^2 C_3^2 r_3^2)} \approx \frac{C_4 r_3}{r_1}.$$

Обыкновенно в этих измерениях падение напряжения в сопротивлении r_1 и в двух параллельных ветвях r_3 и C_3 весьма мало по сравнению с падением напряжения в конденсаторе C_2 и в параллельном к нему сопротивлении r_2 .



Фиг. 68. Мостик Шеринга.



Фиг. 69. Диаграмма для определения угла потерь.

а также и в C_4 , а потому напряжение у обкладок испытуемого конденсатора можно приравнять к внешнему напряжению U и в соответствии с этим потери в диэлектрике конденсатора C_2 могут быть выражены через $\frac{U^2}{r_2} = U^2 \frac{\omega^2 C_3 C_4 r_3^2}{r_1}$.

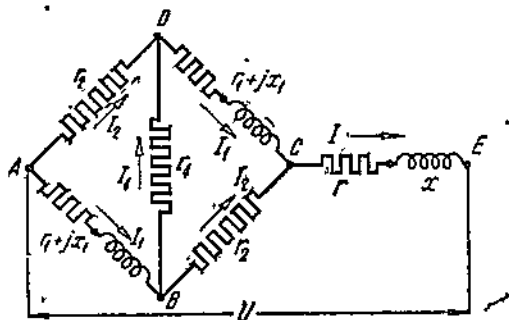
При определении потерь в диэлектриках, как таковых, вычисляют не потери, а вычисляют так называемый угол потерь, т. е. угол, образуемый суммарным током с зарядным током (фиг. 69):

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \angle(I_2, I_C) = \frac{U}{r_2} : U \omega C_2 = \frac{1}{\omega r_2 C_2} = \frac{\omega^2 C_3 C_4 r_3^2 r_1}{\omega r_1 C_4 r_3} = \omega C_3 r_3.$$

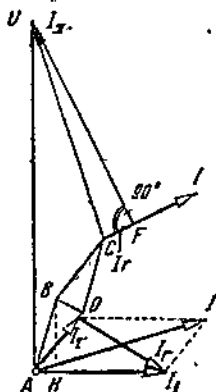
Значения углов потерь для разных диэлектриков приведены в томе I, стр. 80.

26. Схемы для получения сдвига фаз в 90°

В счетчиках и других измерительных приборах встречается иногда необходимость иметь сдвиг фаз в 90° между внешним напряжением U и током в (тонкой) измерительной катушке. Одной из таких схем является схема, предложенная Гергесом. Она представляет собой мостик (фиг. 70), в двух



Фиг. 70. Схема Гергеса.



Фиг. 71. Векторная диаграмма для схемы Гергеса.

противоположных ветвях которого включены тождественные измерительные обмотки $Z_1 = r_1 + jx_1$, в двух других ветвях — равные активные сопротивления r_2 , а в перемычке также активное сопротивление r_4 . Вся схема соединяется последовательно с импедансом $Z = r + jx$.

Следствием симметрии моста является то, что токи в противоположных ветвях AB и CD , а также в ветвях BC и DA имеют одни и те же величину и фазу. Из схемы вытекают следующие соотношения для узлов B и C :

$$i_1 = i_2 + i_4 \quad \text{и} \quad i_1 + i_2 = i$$

и для контуров $ABCE$ и ABD

$$\dot{U} = Z_1 i_1 + r_2 i_2 + Z i = (Z + Z_1) i_1 + (r_2 + Z) i_2,$$

$$Z_1 i_1 + r_4 i_4 - r_2 i_2 = 0$$

или

$$Z_1 i_1 + r_4 (i_1 - i_2) - r_2 i_2 = 0.$$

Определяя из последнего уравнения $\dot{I}_2 = \frac{Z_1 + r_4}{r_2 + r_4} \dot{I}_1$ и подставляя его значение в уравнение для $\dot{U}$:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \left[Z + Z_1 + \frac{(Z_1 + r_4)(r_2 + Z)}{r_2 + r_4} \right] \cdot \dot{I}_1 = \\ &= \left[r + jx + r_1 + jx_1 + \frac{(r_1 + r_4 + jx_1)(r + r_2 + jx)}{r_2 + r_4} \right] \dot{I}_1,\end{aligned}$$

мы после отделения мнимой части выражения в скобках от действительной

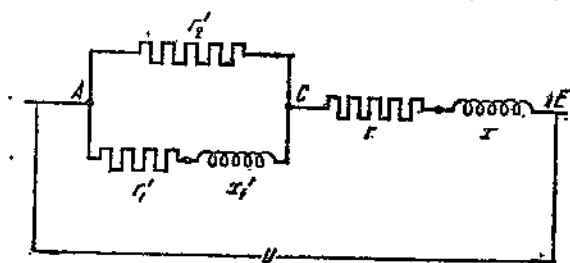
$$\begin{aligned}\dot{U} &= \left[r + r_1 + \frac{(r_1 + r_4)(r + r_2) - xx_1}{r_2 + r_4} \right] \dot{I}_1 + \\ &+ j \left[x + x_1 + \frac{(r_1 + r_4)x + (r + r_2)x_1}{r_2 + r_4} \right] \dot{I}_1,\end{aligned}$$

найдем, что ток $\dot{I}_1$ будет сдвинут на 90° по отношению к напряжению $\dot{U}$, когда выражение, стоящее в первой скобке, будет равно нулю, т. е. когда

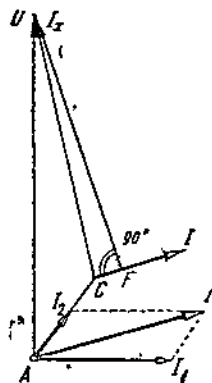
$$r + r_1 + \frac{(r_1 + r_4)(r + r_2) - xx_1}{r_2 + r_4} = 0. \quad (26,1)$$

Это уравнение и дает искомую связь между активными и реактивными сопротивлениями отдельных элементов, входящих в рассматриваемую схему, для получения сдвига в 90° между $\dot{U}$ и $\dot{I}_1$.

На фиг. 71 представлена векторная диаграмма напряжений и токов. В этой диаграмме стороны параллелограмма $ABCD$ представляют собой падения напряжения в соответствующих ветвях контура $ABCD$ (фиг. 70):



Фиг. 72. Схема Гуммеля.



Фиг. 73. Векторная диаграмма для схемы Гуммеля.

$$m_U \cdot \overline{DC} = m_U \cdot \overline{AB} = m_U \cdot \overline{AH} + m_U \cdot \overline{HB} = r_1 \dot{I}_1 + jx_1 \dot{I}_1;$$

$$m_U \cdot \overline{AD} = m_U \cdot \overline{BC} = r_2 \dot{I}_2; \quad m_U \cdot \overline{BD} = r_4 \dot{I}_4;$$

$$m_U \cdot \overline{CU} = (r + jx) \dot{I}.$$

При правильно подобранных сопротивлениях вектор тока $\dot{I}_1$ должен быть перпендикулярен к вектору $U = m_U \cdot \overline{AU}$.

От схемы Гергеса легко перейти к схеме Гуммеля. Если точки B и D в схеме Гергеса закоротить, т. е. принять, что $r_4 = 0$, то эта схема превратится в схему фиг. 72. В этой последней схеме две последовательно соединенные тождественные группы, состоящие из параллельно соединенных элементов r_2 и Z_1 , можно заменить одной, состоящей из импеданца

$$Z'_1 = r'_1 + jx'_1 = 2Z_1 = 2r_1 + 2jx_1$$

с присоединенным к нему параллельно сопротивлением $r'_2 = 2r_2$, и тогда мы получим схему Гуммеля (фиг. 72). Ток в Z_1 будет отставать от U на 90° при условии, которое определяется из уравнения (26,1), если в нем подставить $r_2 = 0$; $r_1 = \frac{r'_1}{2}$; $x_1 = \frac{x'_1}{2}$ и $r_2 = \frac{r'_2}{2}$.

$$r + \frac{r'_1}{2} + \frac{\left(\frac{r'_1}{2} + 0\right)\left(r + \frac{r'_2}{2}\right) - x \frac{x'_1}{2}}{\frac{r'_2}{2}} = 0.$$

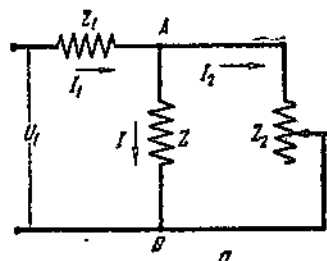
или

$$xx'_1 = r(r'_1 + r'_2) + r'_1 r'_2. \quad (26,2)$$

Векторная диаграмма для схемы Гуммеля (фиг. 73) отличается от векторной диаграммы схемы Гергеса тем, что точки B и D совпадают и параллелограм $ABCD$ превращается в прямую AC .

27. Схемы Бушера

Бушеры были предложены несколько схем, при помощи которых можно добиться автоматического постоянства величины тока в приемнике энергии независимо от величины и характера нагрузки при условии постоянства напряжения сети. Одна из таких схем изображена на фиг. 74 и 75.



Фиг. 74. Схема Бушера.

Определим, каковы и в каком соотношении должны быть полные сопротивления Z_1 и Z , чтобы ток i_2 сохранял при всех значениях Z_2 постоянную величину. В неразветвленной части цепи ток равен

$$i_1 = \frac{U_1}{Z_1 + \frac{ZZ_2}{Z + Z_2}} = \frac{(Z + Z_2) U_1}{ZZ_1 + Z_1 Z_2 + Z_2 Z}.$$

Этот ток распределяется между двумя параллельными ветвями обратно пропорционально полным сопротивлениям Z и Z_2 этих ветвей:

$$i_2 = \frac{Z U_1}{ZZ_1 + Z_2(Z + Z_1)} \quad \text{и} \quad i = \frac{Z_2 U_1}{ZZ_1 + Z_2(Z + Z_1)}.$$

Для того чтобы ток i_2 при всех значениях Z_2 имел одно и то же значение, необходимо, чтобы i_2 не зависело от Z_2 или чтобы множитель при Z_2 равнялся нулю. Выражая Z и Z_1 через их активные и реактивные сопротивления

$$Z + Z_1 = r + jx + r_1 + jx_1 = 0,$$

мы найдем, что это условие будет соблюдено, когда $r + r_1 = 0$ и $x + x_1 = 0$, т. е. когда оба элемента, Z и Z_1 , не имеют активного сопротивления и их реактансы противоположны: в одном элементе включена индуктивность, а в другом — емкость, и когда индуктивность и емкость находятся в резонансе с частотой сети $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ и $Z + Z_1 = j\omega L - \frac{j}{\omega C} = 0$.

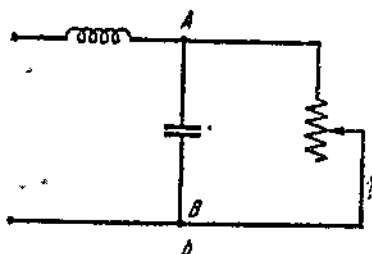
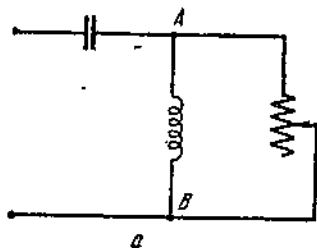
При этом или индуктивность или емкость могут находиться в ответвлении (фиг. 75, а и б). Предположим, что в ответвлении находится емкость, т. е. что

$$Z_1 = j\omega L \quad \text{и} \quad Z = -\frac{j}{\omega C}.$$

При условии $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ток в правой ветви имеет постоянное значение

$$i_2 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L} = -j \frac{\dot{U}_1}{\omega L} = -j \frac{\dot{U}}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

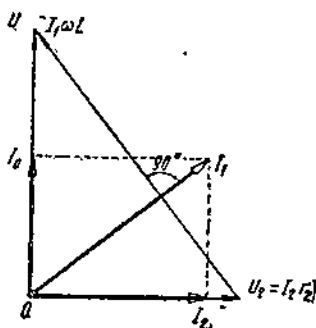
независимо от величины Z_2 , и по фазе он отстает от внешнего напряжения на 90° . При активной нагрузке $Z_2 = r_2$ первичный ток



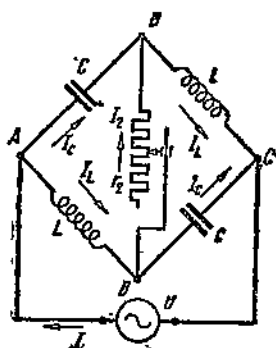
Фиг. 75. Схемы Бушерио.

$$j_1 = \dot{U}_1 \frac{Z + Z_2}{Z Z_1} = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} + \frac{Z_2 \dot{U}_1}{Z Z_1} = -j \frac{\dot{U}_1}{\omega L} + \frac{r_2 \dot{U}_1}{j\omega L \left(-\frac{j}{\omega C}\right)} = -j \frac{\dot{U}_1}{\sqrt{\frac{L}{C}}} + \frac{\dot{U}_1 r}{\frac{L}{C}},$$

а ток в ответвлении $\dot{i} = \dot{i}_1 - \dot{i}_2 = \frac{r_2 \dot{U}_1}{\frac{L}{C}}$ совпадает с внешним напряжением и увеличивается по мере увеличения r_2 .



Фиг. 76. Векторная диаграмма для схемы Бушерио.



Фиг. 77. Мостик Бушерио

Напряжение на зажимах приемника энергии отстает от напряжения $\dot{U}_1$ на 90° :

$$\dot{U}_2 = I_2 r_2 = -j \frac{r_2}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \dot{U}_1.$$

Соответствующая диаграмма напряжений и токов представлена на фиг. 76.

Интересно отметить, что когда правая часть цепи схемы разомкнута, $r_2 = \infty$, то мы имеем, одну неразветвленную цепь, в которой имеет место резонанс напряжений, приводящий к бесконечно большому значению напряжения $\dot{U}_2 = \infty$ и первичного тока $I_1 = \infty$, а также тока в ответвлении $I = \infty$, поэтому в нагрузочной ветви сопротивление r_2 не должно превышать определенной величины.

Другая схема для получения переменного тока постоянной величины, также предложенная Бушера, изображена на фиг. 77. В этой схеме, напоминающей мостик Уитстона, в одной паре противоположных сторон включаются одинаковые индуктивности L , а в другой паре — одинаковые емкости C , которые находятся в резонансе с частотой сети $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. При этих условиях ток в перемычке BD имеет постоянную величину независимо от значения сопротивления r_2 (нагрузка перемычки может быть и любого другого характера). В силу симметрии токи в противоположных ветвях AB и CD должны быть равны по величине и фазе, как и в ветвях BC и AD .

Для этой схемы мы можем написать следующие уравнения:

$$i_L = i_2 + i_C$$

и

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I}_L - \frac{1}{\omega C} \dot{I}_C = j\omega L (\dot{I}_L - \dot{I}_C) = j\omega L \dot{I}_2,$$

откуда

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{j\omega L} = -j \frac{\dot{U}}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad \text{и} \quad \dot{U}_2 = r_2 \dot{I}_2 = -j \frac{r_2 \dot{U}}{\sqrt{\frac{L}{C}}},$$

мы получаем, что ток $\dot{I}_2$ в перемычке имеет постоянное значение независимо от сопротивления r_2 и отстает от внешнего напряжения на 90° .

Для контура ABD мы имеем

$$j\omega L \dot{I}_L + r_2 \dot{I}_2 - \left(-\frac{j}{\omega C}\right) \dot{I}_C = 0,$$

или так как

$$\dot{I}_L + \dot{I}_C = \dot{I} = -\frac{r_2 \dot{I}_2}{j\omega L} = \frac{r_2 \dot{U}}{\omega^2 L^2} = \frac{r_2 \dot{U}}{L/C}$$

и так как $\dot{I}_L - \dot{I}_C = \dot{I}_2$ то

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{I} + \dot{I}_2}{2} = -j \frac{\dot{U}}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} + \frac{r_2 \dot{U}}{2\frac{L}{C}}$$

и

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{I} - \dot{I}_2}{2} = j \frac{\dot{U}}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} + \frac{r_2 \dot{U}}{2\frac{L}{C}}.$$

Эта схема отличается от предыдущей тем, что в ней имеются две индуктивности и две емкости, через которые проходят половинные токи. И в этой схеме, когда $r_2 = \infty$, мы имеем полный резонанс напряжений $\dot{U}_2 = \infty$, и токи во всех четырех ветвях четырехугольника будут бесконечно велики.

Практического значения эти схемы не имеют, так как даже при индуктивной нагрузке коэффициент мощности невелик, и кроме того, должны быть включены в цепь большие индуктивности и, что особенно трудно осуществимо, весьма большие емкости.

В приведенной на стр. 88 таблице приведены активные и реактивные сопротивления и проводимости для простейших схем.

Таблица активных и реактивных сопротивлений и проводимостей простейших схем,

$$Z = r + jx = z(\cos \varphi + j \sin \varphi) = ze^{j\varphi}; Y = g - jb = y(\cos \varphi - j \sin \varphi) = ye^{-j\varphi}$$

Схема	$Z = r + jx$	$z = \frac{1}{y}$	$\lg \varphi$	y	$Y = g - jb$
	$r + j\omega L$	$\sqrt{\frac{1}{r^2 + \omega^2 L^2}}$	$\frac{\omega L}{r}$	$\frac{1}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}$	$\frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2}$
	$r - j \frac{1}{\omega C}$	$\sqrt{\frac{1}{r^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$	$-\frac{1}{r\omega C}$	$\frac{\omega C}{\sqrt{1 + r^2 \omega^2 C^2}}$	$\frac{r\omega^2 C^2}{1 + r^2 \omega^2 C^2} + j \frac{\omega C}{1 + r^2 \omega^2 C^2}$
	$r + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$	$\sqrt{\frac{\omega^2}{(1 - \omega L \omega C)^2 + r^2 \omega^2 C^2}}$	$\frac{\omega L}{r} - \frac{1}{r\omega C}$	$\frac{\omega C}{\sqrt{(1 - \omega L \omega C)^2 + r^2 \omega^2 C^2}}$	$\frac{r\omega^2 C^2}{(1 - \omega L \omega C)^2 + r^2 \omega^2 C^2} + j \frac{\omega C (1 - \omega L \omega C)}{(1 - \omega L \omega C)^2 + r^2 \omega^2 C^2}$
	$\frac{r\omega^2 L^2}{r^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{r\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2}$	$\frac{r\omega L}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}$	$\frac{r}{\omega L}$	$\frac{1}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}$	$\frac{1}{r} - j \frac{1}{\omega L}$
	$\frac{r}{1 + r^2 \omega^2 C^2} - j \frac{r\omega C}{1 + r^2 \omega^2 C^2}$	$\frac{r}{\sqrt{1 + r^2 \omega^2 C^2}}$	$-\omega C$	$\frac{1}{\sqrt{1 + r^2 \omega^2 C^2}}$	$\frac{1}{r} + j\omega C$
	$\frac{r}{(1 - \omega L \omega C)^2 + r^2 \omega^2 C^2} + j \frac{\omega L - \omega C (r^2 + \omega^2 L^2)}{(1 - \omega L \omega C)^2 + r^2 \omega^2 C^2}$	$\frac{r}{\sqrt{(1 - \omega L \omega C)^2 + r^2 \omega^2 C^2}}$	$\frac{\omega L - \omega C (r^2 + \omega^2 L^2)}{r}$	$\frac{1}{\sqrt{(1 - \omega L \omega C)^2 + r^2 \omega^2 C^2}}$	$\frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L - \omega C (r^2 + \omega^2 L^2)}{r^2 + \omega^2 L^2}$
	$\frac{r\omega^2 L^2 \omega C^2}{(1 - \omega L \omega C)^2 + r^2 \omega^2 C^2} + j \frac{\omega L (1 - \omega L \omega C) + r^2 \omega^2 C^2}{(1 - \omega L \omega C)^2 + r^2 \omega^2 C^2}$	$\frac{\omega L \sqrt{1 + r^2 \omega^2 C^2}}{\sqrt{(1 - \omega L \omega C)^2 + r^2 \omega^2 C^2}}$	$\frac{1 - \omega L \omega C + r^2 \omega^2 C^2}{r\omega L \omega C^2}$	$\frac{\omega L \sqrt{1 + r^2 \omega^2 C^2}}{\omega L \sqrt{1 + r^2 \omega^2 C^2}}$	$\frac{r\omega^2 C^2}{\omega L (1 + r^2 \omega^2 C^2)} - j \frac{1 + r^2 \omega^2 C^2}{\omega L (1 + r^2 \omega^2 C^2)}$
	$\frac{r\omega^2 L^2}{r^2 (1 - \omega L \omega C)^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{r\omega L (1 - \omega L \omega C) + \omega^2 L^2}{r^2 (1 - \omega L \omega C)^2 + \omega^2 L^2}$	$\frac{r\omega L}{\sqrt{r^2 (1 - \omega L \omega C)^2 + \omega^2 L^2}}$	$\frac{r (1 - \omega L \omega C)}{\omega L}$	$\frac{1}{\sqrt{r^2 (1 - \omega L \omega C)^2 + \omega^2 L^2}}$	$\frac{1}{r} - j \frac{1 - \omega L \omega C}{\omega L}$

Задача 19. Определить значения L , C , f и $\cos \varphi$ для схемы фиг. 75, чтобы при внешнем напряжении $U_1 = 120$ В и $f = 500$ Hz ток в сопротивлении Z_1 равнялся $I_2 = 10$ А при $r_2 = 2 \Omega$ и $r_2 = 12 \Omega$.

Решение. Находим

$$\omega L = \frac{U_1}{I_2} = \frac{120}{10} \Omega = 12 \Omega; \quad L = \frac{12}{2\pi \cdot 500} \text{ H} = 0,00382 \text{ H};$$

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{\omega \cdot (\omega L)} = \frac{1}{3140 \cdot 12} \text{ F} = 26,5 \mu\text{F};$$

$$\frac{L}{C} = \frac{0,00382}{26,5 \cdot 10^{-6}} \Omega^2 = 144 \Omega^2; \quad \sqrt{\frac{L}{C}} = 12 \Omega;$$

$$I_1 = U_1 \sqrt{\frac{1}{\frac{L}{C}} + \left(\frac{r_2}{C}\right)^2},$$

когда $r_2 = 2 \Omega$, то

$$I_1 = 120 \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{2^2}{144^2}} \text{ A} = 10,1 \text{ A} \quad \text{и} \quad \cos \varphi_1 = \frac{r_2 I_2^2}{U_1 I_1} = \frac{2 \cdot 10^2}{120 \cdot 10,1} = 0,165,$$

когда $r_2 = 12 \Omega$, то

$$I_1 = 120 \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{12^2}{144^2}} \text{ A} = 14,2 \text{ A} \quad \text{и} \quad \cos \varphi_1 = \frac{12 \cdot 10^2}{120 \cdot 14,2} = 0,705.$$

28. Взаимная индуктивность в цепях переменного тока

Когда ток, протекающий по одному контуру, создает магнитный поток пронизывающий другой контур, то такие два контура обладают взаимной индуктивностью, и изменение тока в одном контуре наводит в другом контуре э. д. с. Эта э. д. с. при условии, что магнитные потоки пропорциональны токам, может быть выражена через

$$e_{2M} = -M_{12} \frac{di_1}{dt}, \quad (28,1)$$

где M_{12} — взаимная индуктивность, измеряемая величиной наводимой в одном контуре э. д. с. при изменении в единицу времени тока в другом контуре на единицу. Как было пояснено выше, при одинаковых изменениях тока в единицу времени наводятся одинаковые э. д. с. взаимной индукции, безразлично от того, будет ли изменяться ток в первом контуре и наводиться э. д. с. во втором, или наоборот, т. е. взаимная индуктивность M_{12} первого контура на второй совпадает по величине с взаимной индуктивностью M_{21} второго контура на первый

$$M_{12} = M_{21} = M. \quad (28,2)$$

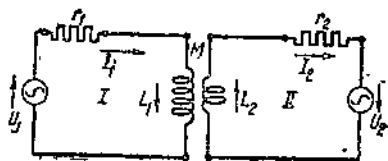
Взаимная индуктивность M может иметь или положительное или отрицательное значение в зависимости от того, направлены ли магнитные потоки в одну сторону или в противоположные стороны, когда токи в контурах протекают по направлениям, принятым нами за положительные.

При синусоидальном изменении токов, когда, например, $i_1 = I_{1m} \sin \omega t$, э. д. с. взаимной индукции также изменяется по закону синуса:

$$e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt} = -\omega M I_{1m} \cos \omega t = \omega M I_{1m} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (28,3)$$

Эта э. д. с., как и э. д. с. самоиндукции, пропорциональна угловой частоте ω и амплитуде наводящего тока I_{1m} . Она отстает по фазе от наводящего тока на 90° , или на четверть периода. Если последние два уравнения написать в символической форме, то току $\dot{I}_1$ будет соответствовать э. д. с. взаимной индукции

$$\dot{E}_{2M} = -j\omega M \dot{I}_1. \quad (28,4)$$



Фиг. 78. Взаимная индуктивность двух контуров.

Предположим, что нам даны два контура или две ветви: r_1 , L_1 и r_2 , L_2 , связанные взаимной индуктивностью M , в которых действуют два отдельных источника переменного тока с одинаковой частотой, дающие напряжения $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ (фиг. 78), и пусть токи с выбранными нами положительными направлениями создают совпадающие по направлению магнитные потоки. В этом случае э. д. с. взаимной индукции, так же как и э. д. с. самоиндукции, должны быть преодолены соответствующими слагающими внешних напряжений. Слагающая напряжения для первого контура равна

$$u_{1M} = -e_{1M} = -\left(-M \frac{di_2}{dt}\right) = M \frac{di_2}{dt},$$

или в комплексной форме

$$\dot{U}_{1M} = -\dot{E}_{1M} = j\omega M \dot{I}_2, \quad (28,5)$$

а для второго контура эта слагающая внешнего напряжения составляет

$$u_{2M} = -e_{2M} = -\left(-M \frac{di_1}{dt}\right) = M \frac{di_1}{dt},$$

или

$$\dot{U}_{2M} = -\dot{E}_{2M} = j\omega M \dot{I}_1. \quad (28,6)$$

Уравнения напряжений для обоих контуров могут быть таким образом написаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 &= r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1. \end{aligned} \right\} \quad (28,7)$$

Когда энергия подводится только к одному контуру, предположим, к первому, а второй контур, не имея своего источника энергии ($\dot{U}_2 = 0$), но, будучи замкнут сам на себя, получает энергию из пер-

вого контура посредством взаимной индукции, соответствующие уравнения для обоих контуров будут:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2, \\ 0 &= r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1, \\ \dot{E}_2 &= -j\omega M \dot{I}_1 = r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2, \end{aligned} \right\} \quad (28,8)$$

или где $\dot{E}_2 = -j\omega M \dot{I}_1$ является для второго контура той э. д. с., которая и вызывает ток.

На действии взаимной индукции, когда энергия подводится лишь к одному контуру, основана работа трансформаторов, которые нами будут рассмотрены в дальнейшем. Здесь же мы остановимся лишь на рассмотрении параллельного и последовательного соединений двух связанных взаимной индуктивностью ветвей.

При параллельном соединении на концах обеих ветвей действует одно и то же напряжение:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U} &= r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\left| \begin{array}{cc} r_2 + j\omega L_2 & j\omega M \\ j\omega M & r_1 + j\omega L_1 \end{array} \right| \end{aligned} \quad (28,9)$$

Из этих уравнений могут быть определены как токи в каждой ветви

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{[r_2 + j\omega(L_2 - M)] \dot{U}}{(r_1 + j\omega L_1)(r_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} \\ \dot{I}_2 &= \frac{[r_1 + j\omega(L_1 - M)] \dot{U}}{(r_1 + j\omega L_1)(r_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}, \end{aligned} \right\} \quad (28,10)$$

и так и суммарный ток

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{[r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)] \dot{U}}{(r_1 + j\omega L_1)(r_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}.$$

При тождественности обоих контуров, $r_1 = r_2 = r$ и $L_1 = L_2 = L$, в обеих ветвях протекают одинаковые токи:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{\dot{I}}{2} = \frac{(r + j\omega L - j\omega M) \dot{U}}{(r + j\omega L)^2 - (j\omega M)^2} = \frac{\dot{U}}{r + j\omega(L + M)}. \quad (28,11)$$

Когда токи в обеих ветвях намагничивают среду в разных направлениях, то в последних формулах (28,11) вместо M должно быть поставлено $-M$, и в этом случае суммарный ток обеих ветвей будет

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{[r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] \dot{U}}{(r_1 + j\omega L_1)(r_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}, \quad (28,12)$$

а при тождественности обеих ветвей ($r_1 = r_2 = r$; $L_1 = L_2 = L$)

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{\dot{I}}{2} = \frac{\dot{U}}{r + j\omega(L - M)}. \quad (28,13)$$

При последовательном соединении один и тот же ток будет проходить через обе ветви, и внешнее напряжение помимо преодоления активного сопротивления и э.д.с. самоиндукции каждой из ветвей должно уравновесить в первой ветви также и э.д.с., которые наводятся в этой ветви благодаря прохождению тока во второй ветви, и во второй ветви — благодаря прохождению тока в первой ветви:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= r_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + r_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I} = \\ &= (r_1 + r_2) \dot{I} + j\omega (L_1 + L_2 + 2M) \dot{I},\end{aligned}$$

откуда

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{r_1 + r_2 + j\omega (L_1 + L_2 + 2M)}. \quad (28,14)$$

В случае, когда обе ветви соединены последовательно таким образом, что намагничивающие действия их направлены в противоположные стороны, протекающий через них ток будет

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{r_1 + r_2 + j\omega (L_1 + L_2 - 2M)}. \quad (28,15)$$

При тождественности обеих ветвей $r_1 = r_2 = r$ и $L_1 = L_2 = L$ ток при последовательном соединении будет равен

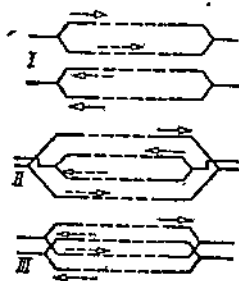
$$I = \frac{\dot{U}}{2r + 2j\omega (L \pm M)}. \quad (28,16)$$

Знак плюс относится к случаю одинаково направленного намагничивающего действия токов в обеих ветвях, знак минус — к случаю, когда намагничивающее действие направлено в противоположные стороны.

Задача 20. Для передачи тока 200 А на 100 м прокладываются рядом два прямых и два обратных параллельных изолированных медных кабеля сечением $S = 50 \text{ мм}^2$ и внешним диаметром $2R = 9 \text{ мм}$ с расстоянием между осями $d = 50 \text{ мм}$. Определить, как распределяются токи между отдельными проводами, и как велико падение напряжения в линии, когда провода расположены: *I* — два прямых и два обратных; *II* — прямой, два обратных, прямой и *III* — прямой, обратный, прямой, обратный (фиг. 79).

Решение. Для того чтобы определить распределение токов, разобьем два прямых и два обратных провода на две петли таким образом, чтобы в прямом и обратном проводах каждой петли протекал один и тот же ток. По соображениям симметрии в расположении *I* и *III* одна петля будет состоять из двух крайних, а другая — из двух средних проводов, разница между этими расположениями будет состоять лишь в обратном положении второй петли, что отзывается на знаке взаимной индуктивности. При расположении *II* токи во всех проводах будут иметь одно и то же значение. Будем считать, что первые два провода составляют первую, а два остальных — вторую петлю. Сопротивление каждой петли равно

$$r = 2 \frac{l}{\gamma S} = 2 \frac{100}{57 \cdot 50} \Omega \approx 0,07 \Omega.$$



Фиг. 79. К задаче 20.

Для расположения I и III индуктивности первой и второй петель составляют

$$L_1 = \left[4 \ln \frac{d-r}{r} + 1 \right] \frac{1}{\text{см}} 10^{-9} \text{ H} = \left[4 \ln \frac{150-4,5}{4,5} + 1 \right] 200 \cdot 100 \cdot 10^{-9} \text{ H} = 0,298 \text{ мГн};$$

$$\omega L_1 = 314 \cdot 0,298 \cdot 10^{-3} \Omega = 0,0935 \Omega;$$

$$L_2 = \left[4 \ln \frac{50-4,5}{4,5} + 1 \right] 2 \cdot 10^{-5} \text{ H} = 0,205 \text{ мГн};$$

$$\omega L_2 = 0,0645 \Omega.$$

Взаимная индуктивность для расположения I равна

$$M = 2 \frac{1}{\text{см}} \ln \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2} \cdot 10^{-9} \text{ H} = 2 \cdot 200 \cdot 100 \ln \frac{100 \cdot 100}{50 \cdot 50} \cdot 10^{-9} \text{ H} = 0,0555 \text{ мГн};$$

$$\omega M = 0,0174 \Omega.$$

Для расположения III

$$M = -0,0555 \text{ мГн}; \omega M = -0,0174 \Omega.$$

Для расположения II

$$L_1 = L_2 = \left[4 \ln \frac{50-4,5}{4,5} + 1 \right] 2 \cdot 10^{-5} \text{ H} = 0,205 \text{ мГн};$$

$$\omega L_1 = \omega L_2 = 0,0645 \Omega;$$

$$M = -2 \cdot 200 \cdot 100 \ln \frac{100 \cdot 50}{150 \cdot 100} \cdot 10^{-9} \text{ H} = -0,0439 \text{ мГн}; \omega M = -0,0138 \Omega.$$

Падение напряжения в линии определится на основании формулы (28,10) как произведение $U = zI$ суммарного тока $I = 200 \text{ A}$ на числовое значение импеданса, представленного выражением

$$Z = \frac{(r_1 + j\omega L_1)(r_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{(r_1 + r_2) + j(\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M)}.$$

Для первого расположения

$$Z_I = \frac{(0,07 + j0,0935) \cdot (0,07 + j0,0645) + 0,0174^2}{0,07 + 0,07 + j(0,0935 + 0,0645 - 0,0348)} \Omega = \frac{1}{100} \cdot \frac{-8,2 + j110,6}{14 + j12,32} \Omega;$$

$$z_I = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{8,2^2 + 110,6^2}{14^2 + 12,32^2}} \Omega = 0,0595 \Omega;$$

$$U_I = z_I I = 0,0595 \cdot 200 \text{ В} = 11,9 \text{ В};$$

$$i_1 = \frac{[r + j(\omega L_2 - \omega M)] \dot{U}_I}{(r + j\omega L_1)(r + j\omega L_2) + \omega^2 M^2},$$

$$I_1 = U_1 \sqrt{\frac{r^2 + (\omega L_2 - \omega M)^2}{(r^2 - \omega L_1 \omega L_2 + \omega^2 M^2)^2 + r^2 (\omega L_1 + \omega L_2)^2}} =$$

$$= 11,9 \sqrt{\frac{0,07^2 + (0,0645 - 0,0174)^2}{(0,07^2 - 0,0935 \cdot 0,0645 + 0,0174^2)^2 + 0,07^2 (0,0935 + 0,0645)^2}} \text{ A} = 90 \text{ A};$$

$$I_2 = I_1 \sqrt{\frac{r^2 + (\omega L_1 - \omega M)^2}{r^2 + (\omega L_2 - \omega M)^2}} = 90 \sqrt{\frac{0,07^2 + (0,0935 - 0,0174)^2}{0,07^2 + (0,0645 - 0,0174)^2}} \text{ A} =$$

$$= 90 \cdot 1,23 \text{ A} = 111 \text{ A}.$$

Потеря мощности будет

$$P = r (I_1^2 + I_2^2) = 0,07 (90^2 + 111^2) \text{ W} = 1,429 \text{ kW.}$$

Для расположения II

$$Z_{II} = \frac{(0,07 + j 0,0645)^2 + 0,0138^2}{0,07 + 0,07 + j (2 \cdot 0,0645 + 2 \cdot 0,0138)} \Omega = \frac{1}{100} \cdot \frac{9,3 + j 90,4}{14 + j 15,69} \Omega;$$

$$z_{II} = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{9,3^2 + 90,4^2}{14^2 + 15,69^2}} \Omega = 0,0437 \Omega;$$

$$U_{II} = z_{II} I = 0,0437 \cdot 200 \text{ V} = 8,75 \text{ V};$$

$$I_1 = 8,75 \sqrt{\frac{0,07^2 + (0,0645 + 0,0138)^2}{(0,07^2 - 0,0645^2 + 0,0138^2) + 0,07^2 (2 \cdot 0,0645)^2}} \text{ A} =$$

$$= 8,75 \cdot 11,55 \text{ A} = 101 \text{ A};$$

$$I_2 = I_1 = 101 \text{ A};$$

$$P = 0,07 (101^2 + 101^2) \text{ W} = 1,428 \text{ kW.}$$

Для расположения III

$$Z_{III} = \frac{(0,07 + j 0,0935) \cdot (0,07 + j 0,0645) + 0,0174^2}{(0,07 + 0,07) + j (0,0935 + 0,0645 + 2 \cdot 0,0174)} \Omega = \frac{1}{100} \cdot \frac{-8,2 + j 110,6}{14 + j 19,28};$$

$$z_{III} = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{8,2^2 + 110,6^2}{14^2 + 19,28^2}} \Omega = 0,0466 \Omega;$$

$$U_{III} = z_{III} I = 0,0466 \cdot 200 \text{ V} = 9,32 \text{ V};$$

$$I_1 = 9,32 \sqrt{\frac{0,07^2 + (0,0645 + 0,0174)^2}{(0,07^2 - 0,0935 \cdot 0,0645 + 0,0174^2) + 0,07^2 (0,0955 + 0,0645)^2}} = 89,8 \text{ A},$$

$$I_2 = 89,8 \sqrt{\frac{0,07^2 + (0,0935 + 0,0174)^2}{0,07^2 + (0,0645 + 0,0174)^2}} = 89,8 \cdot 1,235 \text{ A} = 111 \text{ A};$$

$$P = 0,07 (89,8^2 + 111^2) = 1,556 \text{ kW.}$$

Если кабели работают на пределе в отношении своего нагрева, то неравномерное распределение токов может привести к перегреву кабелей.

Задача 21. Измерения в цепи из двух последовательно соединенных катушек, связанных взаимной индуктивностью, дали: 1) когда намагничивающее действие обеих катушек совпадало, $U = 120 \text{ V}$; $I_1 = 25 \text{ A}$ и $P_1 = 600 \text{ W}$; 2) когда намагничивающее действие их было направлено в противоположные стороны, $U = 120 \text{ V}$; $I_2 = 40 \text{ A}$ и $P_2 = 1536 \text{ W}$. Определить взаимную индуктивность обеих катушек ($f = 50 \text{ Hz}$).

Решение. Определяем полные, активные и реактивные сопротивления для двух случаев последовательного соединения:

$$z_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{120}{25} \Omega = 4,8 \Omega; \quad r = \frac{P_1}{I_1^2} = \frac{600}{25^2} \Omega = 0,96 \Omega;$$

$$x_1 = \sqrt{z_1^2 - r^2} = \sqrt{4,8^2 - 0,96^2} \Omega = 4,71 \Omega; \quad z_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{120}{40} \Omega = 3 \Omega;$$

$$r = \frac{P_2}{I_2^2} = \frac{1536}{40^2} = 0,96 \Omega; \quad x_2 = \sqrt{z_2^2 - r^2} = \sqrt{3^2 - 0,96^2} \Omega = 2,84 \Omega;$$

$$\omega (L' + L'' + 2M) = x_1; \quad \omega (L' + L'' - 2M) = x_2. \quad 4\omega M = x_1 - x_2 =$$

$$= 4,71 - 2,84 \Omega = 1,87 \Omega;$$

$$M = \frac{1,87}{4 \cdot 2\pi \cdot 50} \text{ H} = 1,49 \text{ мГн.}$$

29. Передача энергий в контурах с магнитной связью

Предположим, что два контура, связанные взаимной индуктивностью, включают в себе кроме сопротивления и индуктивности также и емкость и что только в одном имеется источник переменного тока (фиг. 80). Уравнения равновесия напряжения для обоих контуров напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \int \frac{i_1 dt}{C_1} + \tilde{M} \frac{di_2}{dt}; \\ 0 &= r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \int \frac{i_2 dt}{C_2} + M \frac{di_1}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (29,1)$$

или если их представить в комплексной форме, то они принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - \frac{j\dot{I}_1}{\omega C_1} + j\omega M \dot{I}_2 = Z_1 \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2; \\ 0 &= r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - \frac{j\dot{I}_2}{\omega C_2} + j\omega M \dot{I}_1 = Z_2 \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1. \end{aligned} \right\} \quad (29,2)$$

В этих уравнениях для большей наглядности и упрощения введены следующие обозначения:

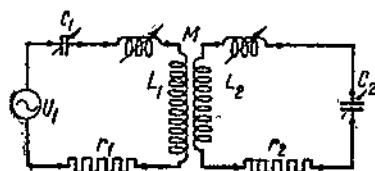
$$\left. \begin{aligned} r_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) &= r_1 + jx_1 = Z_1; \\ r_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) &= r_2 + jx_2 = Z_2 \\ \text{и} \quad j\omega M &= Z_M, \end{aligned} \right\} \quad (29,3)$$

где Z_1 и Z_2 — полные импедансы каждого контура независимо от другого, а Z_M — их так называемый взаимный импеданс.

По этим уравнениям могут быть найдены значения $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$:

$$\dot{I}_2 = -\frac{Z_M}{Z_2} \dot{I}_1;$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\omega M}{\sqrt{r_2^2 + x_2^2}} \dot{I}_1;$$



Фиг. 80.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1}{Z_1 - \frac{Z_M^2}{Z_2}} = \frac{U_1}{r_1 + jx_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_2 + jx_2}} = \frac{U_1}{r_1 + \frac{\omega^2 M^2 r_2}{r_2^2 + x_2^2} + j \left(x_1 - \frac{\omega^2 M^2 x_2}{r_2^2 + x_2^2} \right)}, \\ I_2 &= \frac{\dot{U}_1}{Z_M - \frac{Z_1 Z_2}{Z_M}} = \frac{\dot{U}_1}{j\omega M - \frac{(r_1 + jx_1)(r_2 + jx_2)}{j\omega M}} = \\ &= \frac{U_1}{-\frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{\omega M} + j \left(\omega M + \frac{r_1 r_2 - x_1 x_2}{\omega M} \right)}, \end{aligned} \quad (29,4)$$

а следовательно, и передаваемая во вторичный контур мощность

$$P_2 = r_2 I_2^2 = \frac{r_2 U_1^2}{\left(\frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{\omega M} \right)^2 + \left(\omega M + \frac{r_1 r_2 - x_1 x_2}{\omega M} \right)^2} = \frac{r_2 U_1^2}{z_{21}^2}, \quad (29,5)$$

где z_{21}^2 — величина знаменателя в последнем уравнении.

Предположим, что r_1 и r_2 остаются неизменными и что мы можем менять x_1 , x_2 , а также M (или ωM). Максимум передаваемой мощности P_2 будет получаться, если z_{21} будет минимальным.

Если мы будем менять только x_1 , то уравнение

$$\frac{\partial z_{21}^2}{\partial x_1} = \frac{2x_1 (r_2^2 + x_2^2)}{\omega^2 M^2} - 2x_2 = 0 \text{ дает, что } \frac{x_1}{x_2} = \frac{\omega^2 M^2}{z_2^2}, \quad (29,6)$$

если менять только x_2 , то

$$\frac{\partial z_{21}^2}{\partial x_2} = \frac{2x_2 (r_1^2 + x_1^2)}{\omega^2 M^2} - 2x_1 = 0 \text{ и } \frac{x_2}{x_1} = \frac{\omega^2 M^2}{z_1^2}, \quad (29,7)$$

и наконец, если менять только связь между контурами,

$$\frac{\partial z_{21}^2}{\partial (\omega M)} = \frac{-2 (r_1^2 + x_1^2) (r_2^2 + x_2^2)}{\omega^3 M^3} + 2\omega M = 0$$

и

$$\omega^2 M^2 = z_1 z_2. \quad (29,8)$$

Если удовлетворены два условия, то одновременно удовлетворяется и третье, так как из трех уравнений [(29,6), (29,7) и (29,8)] одно является следствием двух других, например, третье следствием двух первых.

Настройка контуров на максимум вторичной мощности, или, что то же самое, на максимум вторичного тока ($r_2 = \text{const}$), приводит к подобию обоих контуров. Разделим уравнение (29,6) на уравнение (29,7), тогда

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{r_1^2 + x_1^2}}{\sqrt{r_2^2 + x_2^2}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1^2}{\omega^2 M^2} = \frac{\omega^2 M^2}{z_2^2}. \quad (29,9)$$

При двойной настройке x , или x_2 и M токи в первичном и вторичном контуре будут равны [см. формулы (29,4) и (29,9)]

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1}{r_1 + \frac{r_1}{r_2} r_2 + j \left(x_1 - \frac{x_1}{x_2} x_2 \right)} = \frac{U_1}{2r_1}; \\ I_2 &= \frac{\omega M}{\sqrt{r_2^2 + x_2^2}} I_1 = \frac{\omega M}{z_2} I_1 = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} I_1 = \frac{U_1}{2 \sqrt{r_1 r_2}} \end{aligned} \right\} \quad (29,10)$$

Мощность, передаваемая во вторичный контур при двойной настройке, равна

$$P_2 = r_2 I_2^2 = \frac{r_2 U_1^2}{4 r_1 r_2} = \frac{U_1^2}{4 r_1}, \quad (29,11)$$

она не зависит от величины r_2 вторичного сопротивления.

При наибольшей мощности во вторичном контуре такая же мощность будет поглощаться в первичном контуре:

$$r_1 I_1^2 = \frac{U_1^2}{4r_1} = r_2 I_2^2. \quad (29,12)$$

Коэффициент полезного действия при такой передаче равен только половине:

$$\eta = \frac{r_2 I_2^2}{r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2} = 0,5. \quad (29,13)$$

Интерес представляет случай, когда первичный и вторичный контуры настраиваются в резонанс с внешней частотой, т. е. когда

$$x_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 0. \\ \omega M = \sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{(r_1^2 + x_1^2)(r_2^2 + x_2^2)} = \sqrt{r_1 r_2}. \quad (29,14)$$

Из последнего уравнения вытекает, что при заданных сопротивлениях r_1 и r_2 максимум мощности удастся получить только путем регулирования M , что при относительно малых значениях r_1 и r_2 приводит к необходимости иметь весьма слабую связь между контурами, но дает очень острую настройку (коэффициент связи равен $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$).

Задача 22. Даны два индуктивных контура, для которых $r_1 = 3 \, \Omega$; $L_1 = 0,3 \, \text{мГн}$; $r_2 = 16 \, \Omega$; $L_2 = 0,8 \, \text{мГн}$; $M = 0,3 \, \text{мГн}$. Определить, какие емкости должны быть введены в оба контура, чтобы получить при $f = 100 \, \text{kHz}$ максимальный ток во вторичном контуре, и чему будет равен этот ток при $U_1 = 0,1 \, \text{В}$.

Решение. Из условий максимального вторичного тока (29,9) имеем

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2}{\omega^2 M^2}, \\ \frac{1}{\omega C_1} = \omega L_1 - \sqrt{\frac{\omega^2 M^2 r_1}{r_2} - r_1^2} = 2\pi \cdot 10^5 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} - \\ - \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 10^{10} \cdot 9 \cdot 10^{-8} \cdot 3}{16}} - 9 \, \Omega = \\ = 107 \, \Omega; \quad C_1 = \frac{1}{107 \cdot 2\pi \cdot 10^5} \, \text{Ф} = 0,0149 \, \mu\text{Ф}.$$

Из условия максимального вторичного тока (29,9) имеем

$$\frac{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{r_1}{r_2},$$

откуда

$$\frac{1}{\omega C_2} = \omega L_2 - \frac{r_2}{r_1} \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = 2\pi \cdot 10^5 \cdot 0,8 \cdot 10^{-3} - \\ - \frac{16}{3} \left(2\pi \cdot 10^5 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} - 107 \right) \, \Omega = 76 \, \Omega;$$

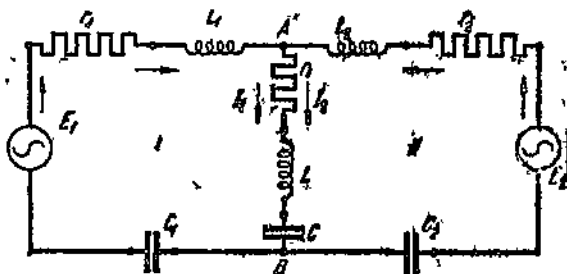
$$C_2 = \frac{1}{2\pi \cdot 10^5 \cdot 76} \text{ F} = 0,0219 \text{ мкФ};$$

$$I_2 = \frac{U_1}{2 \sqrt{r_1 r_2}} = \frac{0,1}{2 \sqrt{16 \cdot 3}} = 7,2 \text{ мА}.$$

30. Общий метод нахождения распределения токов в сложных разветвленных цепях (метод контурных токов)

Для нахождения распределения токов в сложных цепях переменного тока с большим числом разветвлений и многими э. д. с. приходится составлять столько уравнений, сколько имеется ветвей. Здесь мы укажем на один общий метод, так называемый метод контурных токов, который облегчает составление и решение уравнений, придавая последним однообразный вид и сокращая иногда число уравнений, подлежащих решению.

По этому методу, вместо того чтобы писать оба закона Кирхгофа в явной форме, предполагают, что в ветвях, входящих в два смежных контура, ток состоит из двух составных частей или двух токов. Из них один представляет собой ток первого контура, а второй — второго контура, а действительный ток в ветви, входящей в два соприкасающихся контура, равен сумме или разности этих слагающих токов в зависимости от условно выбранных нами положительных направлений токов в отдельных контурах. Так, например, для схемы (фиг. 81) мы для тока в ветви АВ пишем, что ток в этой ветви равен сумме токов $I_1 + I_2$. В соответствии с этим и падение напряжения в этой ветви будет состояться из двух слагающих:



Фиг. 81. Схема замещения для нахождения распределения токов в сложных сетях, связанных электрически.

Такой прием избавляет нас от применения первого закона Кирхгофа и сокращает число искомых значений токов. Если две ветви связаны не электрически, а индуктивно (фиг. 80), то эту связь рассматривают так же, как общую ветвь. Падение напряжения в этой условной общей ветви в связи с выбранными направлениями тока в первом и втором контурах выразится для первого контура через $j\omega M I_1 - j\omega M I_2$, а для второго — через $j\omega M I_2 - j\omega M I_1$.

Для сокращения письма при методе контурных токов составляют выражения полных сопротивлений всех элементов, входящих в каждый контур, обозначая полные импедансы целого контура через Z_{aa} с двумя одинаковыми индексами, а также так называемые взаимные полные

импедансы для каждой общей ветви, которая входит в два соприкасающихся контура, — через Z_{ab} с двумя индексами, указывающими, в какие два контура входит рассматриваемая ветвь. Так, например, для схемы (фиг. 81) можно написать

$$\begin{aligned} Z_{11} &= r + r_1 + j\omega (L + L_1) + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} \right); \\ Z_{22} &= r + r_2 + j\omega (L + L_2) + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_2} \right); \\ Z_{12} = Z_{21} &= r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}. \end{aligned} \quad (30,1)$$

Импедансы с одинаковыми индексами, но поставленными в обратном порядке, равны между собой.

Если бы во втором контуре II мы за положительное направление тока приняли противоположное направление, то r , $j\omega L$ и $\frac{1}{j\omega C}$ в последнем уравнении мы должны были бы взять со знаком минус.

Для схемы фиг. 80

$$\begin{aligned} Z_{11} &= r_1 + j\omega (L_1 + M) + \frac{1}{j\omega C_1}; \\ Z_{22} &= r_2 + j\omega (L_2 + M) + \frac{1}{j\omega C_2}; \\ Z_{12} = Z_{21} &= -j\omega M. \end{aligned} \quad (30,2)$$

Применяя второй закон Кирхгофа к каждому контуру и учитывая падение напряжения от всех слагающих токов в отдельных ветвях контура, мы получаем столько линейных и однообразно составленных уравнений, сколько у нас контуров. Предположим, что система состоит из трех контуров

$$\left. \begin{aligned} Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{21}\dot{I}_2 + Z_{31}\dot{I}_3 &= \dot{E}_1; \\ Z_{12}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + Z_{32}\dot{I}_3 &= \dot{E}_2; \\ Z_{13}\dot{I}_1 + Z_{23}\dot{I}_2 + Z_{33}\dot{I}_3 &= \dot{E}_3. \end{aligned} \right\} \quad (30,3)$$

Здесь $\dot{E}_1$, $\dot{E}_2$ и $\dot{E}_3$ — э. д. с., действующие в соответствующих контурах. Если в каком-нибудь контуре нет э. д. с., то правая часть соответствующего уравнения должна быть приравнена нулю. Равным образом, если какие-нибудь два контура не имеют общей ветви, то их взаимный импеданс (например Z_{13}) также равен нулю.

Решая приведенные выше уравнения по методу детерминантов, мы можем решения для искоемых токов привести к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= (Y)_{11}\dot{E}_1 + (Y)_{21}\dot{E}_2 + (Y)_{31}\dot{E}_3; \\ \dot{I}_2 &= (Y)_{12}\dot{E}_1 + (Y)_{22}\dot{E}_2 + (Y)_{32}\dot{E}_3; \\ \dot{I}_3 &= (Y)_{13}\dot{E}_1 + (Y)_{23}\dot{E}_2 + (Y)_{33}\dot{E}_3. \end{aligned} \right\} \quad (30,4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} (Y)_{11} &= \begin{vmatrix} Z_{22}Z_{33} \\ Z_{23}Z_{32} \end{vmatrix} : D; & (Y)_{21} &= (Y)_{12} = \begin{vmatrix} Z_{23}Z_{33} \\ Z_{21}Z_{31} \end{vmatrix} : D; \\ (Y)_{31} &= (Y)_{13} = \begin{vmatrix} Z_{21}Z_{31} \\ Z_{23}Z_{32} \end{vmatrix} : D; \\ (Y)_{22} &= \begin{vmatrix} Z_{33}Z_{13} \\ Z_{31}Z_{11} \end{vmatrix} : D; & (Y)_{32} &= (Y)_{23} = \begin{vmatrix} Z_{31}Z_{11} \\ Z_{32}Z_{12} \end{vmatrix} : D; \\ (Y)_{33} &= \begin{vmatrix} Z_{11}Z_{21} \\ Z_{12}Z_{22} \end{vmatrix} : D \end{aligned} \right\} \quad (30,5)$$

$$D = \begin{vmatrix} Z_{11}Z_{21}Z_{31} \\ Z_{12}Z_{22}Z_{32} \\ Z_{13}Z_{23}Z_{33} \end{vmatrix}$$

Коэффициенты (Y) имеют размерность проводимости, так как степень знаменателя на единицу больше степени числителя (числитель у нас имеет вторую, а знаменатель третью степень от Z). Их можно рассматривать как приведенные проводимости (Y) с двумя одинаковыми индексами представляют собой приведенную проводимость данного контура, которая, будучи помножена на э. д. с., действующую в этом контуре, определяет ток в этом контуре при условии, что во всех остальных контурах нет э. д. с., но оставлены внутренние сопротивления соответствующих источников тока. Например, если $E_1 \neq 0$, а $E_2 = E_3 = 0$, то ток в первом контуре равнялся бы $I_1' = (Y)_{11} E_1$.

Проводимости (Y) с двумя разными индексами мы можем рассматривать как приведенные взаимные проводимости, определяющие ток в одном контуре для того случая, если действует э. д. с. лишь в одном из других контуров. Например, если действует э. д. с. во втором контуре ($E_2 \neq 0$), а все остальные э. д. с. равны нулю, то ток в первом контуре равнялся бы $I_1' = (Y)_{21} E_2$.

Уравнения (30,4) отражают на себе принцип наложения (суперпозиции). Ток в каждом контуре или ветви составляется из слагающих токов, которые получались бы в этом контуре, если бы в данной системе каждая э. д. с. действовала обособленно, независимо от других.

Так как в детерминанте D горизонтальные строки и вертикальные столбцы совпадают ($Z_{21} = Z_{12}$, $Z_{32} = Z_{23}$ и $Z_{31} = Z_{13}$), то соответствующие коэффициенты приведенных взаимных проводимостей равны между собой, т. е.

$$(Y)_{21} = (Y)_{12}, (Y)_{31} = (Y)_{13}, (Y)_{32} = (Y)_{23},$$

а это равенство имеет своим следствием, что если сначала в контурной ветви a действовала э. д. с. E_a и при этом в ветви b получался ток I_b , то при переносе этой э. д. с. в ветвь b в ветви a получится ток I_a ,

равный I_b , который раньше протекал в ветви b . Вышеприведенный вывод и является доказательством так называемого закона взаимности.

Если в отдельных контурах направление тока выбрано совпадающим с направлением действующей в этом контуре э. д. с., то фазовый угол полной приведенной проводимости для этого контура, т. е. фазовый угол (Y) с двумя одинаковыми индексами, например $(Y)_{11}$, $(Y)_{22}$, ..., будет меньше 90° . Что касается фазовых углов взаимных приведенных проводимостей $(Y)_{12}$, $(Y)_{13}$ с разными индексами, то фазовые углы могут быть и больше и меньше 90° в зависимости от того, совпадают ли направления составных слагающих тока в данной ветви от э. д. с., действующей в другой ветви с первоначально выбранным направлением положительного тока в рассматриваемой ветви или нет.

Расчет распределения токов в сложных системах, например, в разветвленных сетях электроснабжения крупных районов, связан с необычайно сложными и кропотливыми вычислениями, и на практике распределение токов находится на так называемых расчетных столах, на которых собираются модели сетей. Полные и взаимные приведенные импедансы сравнительно просто могут быть найдены на моделях сетей, если включать одну и ту же э. д. с. в разные контуры и одновременно измерять во всех ветвях токи по величине и фазе. Отношение соответствующих токов к напряжениям с учетом сдвига фаз дает значение приведенных проводимостей.

В распределительных сетях все э. д. с. обыкновенно отдают энергию в сеть, и если в какой-нибудь ветви мысленно выключается э. д. с. (с оставлением внутреннего сопротивления генератора, то ток в этой ветви получится обратного направления, поэтому мы перед числовыми значениями взаимных проводимостей должны ставить знак минус:

$$\begin{aligned}(Y)_{11} &= (y)_{11} e^{-j\varphi_{11}}, & (Y)_{22} &= (y)_{22} e^{-j\varphi_{22}}, & (Y)_{33} &= (y)_{33} e^{-j\varphi_{33}}, \\(Y)_{12} &= -(y)_{12} e^{-j\varphi_{12}}, & (Y)_{13} &= -(y)_{13} e^{-j\varphi_{13}}, \\(Y)_{23} &= -(y)_{23} e^{-j\varphi_{23}}.\end{aligned}\quad (30,6)$$

Если

$$\dot{E}_1 = E, \quad \dot{E}_2 = E_2 e^{-j\varphi_2}, \quad \dot{E}_3 = E_3 e^{-j\varphi_3}$$

э. д. с., действующие в отдельных ветвях, то полные токи могут быть выражены через

$$\left. \begin{aligned}\dot{I}_1 &= (y)_{11} E_1 e^{-j\varphi_{11}} - (y)_{12} E_2 e^{-j(\varphi_2 + \varphi_{12})} - (y)_{13} E_3 e^{-j(\varphi_3 + \varphi_{13})} \dots \\ \dot{I}_2 &= (y)_{22} E_2 e^{-j\varphi_{22}} - (y)_{12} E_1 e^{-j\varphi_{12}} - (y)_{23} E_3 e^{-j(\varphi_3 + \varphi_{23})} \dots\end{aligned} \right\} \quad (30,7)$$

Активные мощности, отдаваемые отдельными э. д. с. (генераторами) в сеть, будут равны сумме произведений э. д. с. на слагающие тока и косинус угла между э. д. с. и слагающими тока.

$$\left. \begin{aligned}P_{1a} &= y_{11} E_1^2 \cos \varphi_{11} - y_{12} E_1 E_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_{12}) - \\ &\quad - y_{13} E_1 E_3 \cos(\varphi_3 + \varphi_{13}); \\ P_{2a} &= y_{22} E_2^2 \cos \varphi_{22} - y_{12} E_1 E_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_{12}) - \\ &\quad - y_{23} E_2 E_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_{23}) \dots\end{aligned} \right\} \quad (30,8)$$

а реактивные мощности — произведению э. д. с. на слагающие тока и на синус угла между э. д. с. и слагающими тока:

$$\left. \begin{aligned} P_{1r} &= y_{11} E_1^2 \sin \varphi_{11} - y_{12} E_1 E_2 \sin (\varphi_2 + \varphi_{12}) - \\ &\quad - y_{13} E_1 E_3 \sin (\varphi_3 + \varphi_{12}); \\ P_{2r} &= y_{22} E_2^2 \sin \varphi_{22} + y_{12} E_1 E_2 \sin (\varphi_2 - \varphi_{12}) - \\ &\quad + y_{23} E_2 E_3 \sin (\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_{23}). \end{aligned} \right\} (30,9)$$

Таким образом может быть разрешена в общем виде задача распределения токов и мощностей в сложных сетях.

31. Схемы замещения и уравнения напряжений и токов

Как бы ни была сложна заданная система и из каких бы элементов она ни состояла, токи во всех ветвях системы прямо пропорциональны действующей в этой системе э. д. с. (при условии, что активные сопротивления, индуктивности и емкости при всех значениях токов и напряжений сохраняют свои значения). Если в системе действуют несколько э. д. с., то ток в любой ветви равен сумме токов, которые получались бы в этой ветви, если каждая э. д. с. действовала в отдельности. Отсюда следует, что как напряжения между концами отдельных ветвей, так и токи в разных ветвях могут быть связаны между собой лишь уравнениями первой степени. Это вытекает непосредственно из законов Кирхгофа, которые связывают напряжения и токи линейными уравнениями.

Если в системе действует лишь одна э. д. с. (или внешнее напряжение), то рассмотрение соотношения между токами и напряжениями при изменении нагрузки одной из ветвей во многих случаях (например, при исследовании режима работы трансформаторов, асинхронных двигателей, длинных линий, фильтров и т. п.) может быть приведено к рассмотрению весьма простых эквивалентных электрических схем, так называемых схем замещения, состоящих из соответственно подобранных активных сопротивлений, индуктивностей и емкостей и имеющих две первичных и две вторичных клеммы. К двум первичным клеммам подводится энергия, а к двум вторичным — присоединяется переменная нагрузка.

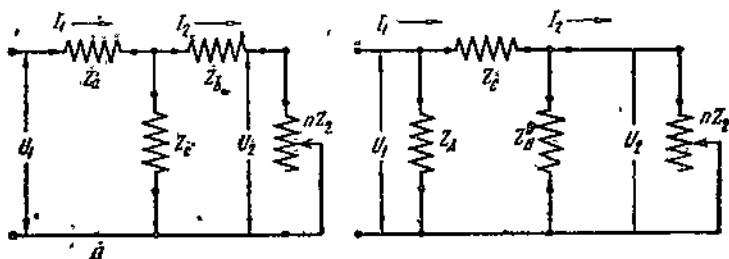
Можно для одной и той же системы составить большое количество самых разнообразных схем замещения, которые все будут удовлетворять данной системе, т. е. при той же нагрузке они будут давать те же напряжения и токи в цепи нагрузки и в цепи источника энергии.

Самыми простыми схемами замещения являются так называемая Т-образная и П-образная схемы (фиг. 82).

Т-образная схема замещения составляется из постоянного импеданса Z_a , последовательно соединяемого с двумя параллельными ветвями. Импеданс одной ветви Z_c остается неизменным, а в другой ветви последовательно с постоянным импедансом Z_b включается переменная нагрузка.

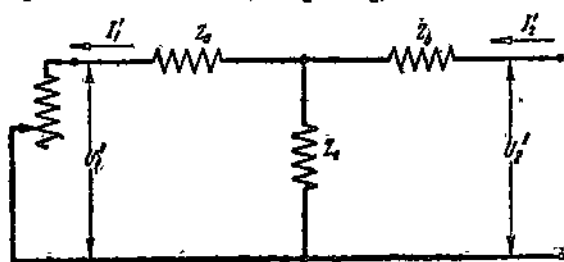
П-образная схема замещения представляет собой постоянный импеданс Z_c , в начале и конце которого параллельно присоединяются импедансы Z_A и Z_B . На конце схемы параллельно к Z_B включается переменная нагрузка внешней цепи.

Если можно поменять места источника энергии и приемника энергии и если при этом не изменятся ни напряжение, ни ток в приемнике энергии, то такая система является симметричной, и схемы замещения в этом случае также должны быть симметричны, т. е. $Z_a = Z_b$ в Т-образной схеме и $Z_A = Z_B$ в Π -образной схеме.



Фиг. 82. Т-образная и Π -образная схемы замещения.

Для любой из этих четырехполюсных схем независимо от того, из каких элементов будет состоять система и какая схема замещения будет применена, между напряжением и током, $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$, в начале схемы и напряжением и током, $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$, в конце схемы (у приемника энергии)



Фиг. 83. Обращенная схема замещения.

существует линейная зависимость, которая может быть выражена следующими двумя уравнениями первой степени:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \quad (31,1)$$

и

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2, \quad (31,2)$$

где коэффициенты A , B , C и D — комплексные величины,

не зависящие ни от нагрузки, ни от напряжения источника энергии, а определяемые лишь значениями сопротивлений, индуктивностей и емкостей отдельных элементов, составляющих неизменяющую часть системы. Эти коэффициенты связаны между собой следующим простым соотношением:

$$AD - BC = 1. \quad (31,3)$$

Чтобы это доказать, поменяем сначала местами источник энергии и приемник энергии и определим зависимость между напряжениями и токами через коэффициенты A , B , C и D (фиг. 83). При таком перемещении напряжения сохраняют свое направление, токи же меняют свой знак, поэтому уравнения напряжений и токов должны быть написаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1' &= A\dot{U}_2' - B\dot{I}_2' \left| \begin{array}{c} D \\ C \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} C \\ A \end{array} \right| \\ -\dot{I}_1' &= C\dot{U}_2' - D\dot{I}_2' \left| \begin{array}{c} B \\ A \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} D \\ C \end{array} \right| \end{aligned}$$

Определяем из этих двух уравнений $\dot{U}_2'$ и $\dot{I}_2'$:

$$\dot{U}_2' = \frac{D}{AD-BC} \dot{U}_1' + \frac{B}{AD-BC} \dot{I}_1', \quad (31,4)$$

$$\dot{I}_2' = \frac{C}{AD-BC} \dot{U}_1' + \frac{A}{AD-BC} \dot{I}_1'. \quad (31,5)$$

Из закона взаимности следует, что если мы приложим напряжение $\dot{U}_1 = \dot{U}$ один раз к первичным клеммам и коротко замкнем вторичные клеммы $\dot{U}_2 = 0$, а затем то же напряжение $\dot{U}_2 = \dot{U}$ приложим ко вторичным клеммам и коротко замкнем первичные клеммы, $\dot{U}_1 = 0$, то должны получиться одни и те же токи в проводах, осуществляющих эти короткие замыкания.

Ток короткого замыкания в первом случае будет равен $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{B}$ [из уравнения (31,1)], а во втором случае ток короткого замыкания будет [из уравнения (31,4)]

$$\dot{I}_1' = \frac{\dot{U}}{B} (AD-BC) = \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{B},$$

откуда мы получаем искомое соотношение (31,3).

Поэтому, если заменить первичные клеммы вторичными и вторичные первичными, то связь между напряжениями и токами выразится через

$$\dot{U}_2' = D\dot{U}_1' + B\dot{I}_1', \quad (31,6)$$

$$\dot{I}_2' = C\dot{U}_1' + A\dot{I}_1'. \quad (31,7)$$

В симметричных системах такая замена не должна отзываться на значениях напряжений и токов, поэтому из сравнения уравнений (31,1), (31,2), (31,6) и (31,7) вытекает, что в симметричных системах коэффициенты A и D должны быть равны между собой и связаны с коэффициентами B и C соотношением

$$A^2 = D^2 = 1 + BC. \quad (31,8)$$

Как видно из уравнений (31,1) и (31,2), первичное напряжение $\dot{U}_1$ и первичный ток $\dot{I}_1$ состоят каждый из двух слагающих, из которых одна пропорциональна вторичному напряжению $\dot{U}_2$, а другая — вторичному току $\dot{I}_2$.

Эти слагающие представляют собой не что иное, как напряжения и токи на первичной стороне при холостом ходе и коротком замыкании на вторичной стороне.

Действительно, пусть нам заданы по величине и фазе вторичное напряжение и ток: $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. Рассмотрим сначала холостой ход, когда вторичная цепь разомкнута, $\dot{I}_2 = 0$, но вторичное напряжение равно $\dot{U}_2$, тогда напряжение и ток на первичной стороне будут

$$\dot{U}_{10} = A\dot{U}$$

и

$$\dot{I}_{10} = C\dot{U}_2. \quad (31,9)$$

При коротком же замыкании вторичной цепи, $\dot{U}_2 = 0$, но при условии, что ток короткого замыкания во вторичной цепи равен току при нагрузке $\dot{I}_2$, первичное напряжение и ток составят

$$\dot{U}_{1k} = B\dot{I}_2 \text{ и } \dot{I}_{1k} = D\dot{I}_2 \quad (31,10)$$

(величинам, относящимся к холостому ходу, мы приписываем индекс 0, а к короткому замыканию — индекс k).

Складывая (геометрически) напряжения и токи при холостом ходе и коротком замыкании вторичной цепи, мы получаем, что

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = \dot{U}_{10} + \dot{U}_{1k}, \quad (31,11)$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 = \dot{I}_{10} + \dot{I}_{1k} \quad (31,12)$$

(первичное напряжение и первичный ток, соответствующие нагрузке вторичной цепи и при напряжении $\dot{U}_2$ и токе $\dot{I}_2$ складываются из суммы первичных напряжений и токов, соответствующих режимам холостого хода при напряжении $\dot{U}_2$, и короткого замыкания при токе $\dot{I}_2$ на вторичной стороне).

32. Определение постоянных четырехполюсника

Комплексные коэффициенты A, B, C и D , входящие в уравнения, связывающие напряжения и токи, могут быть определены из опытов холостого хода и короткого замыкания для любых четырехполюсных схем независимо от того, из каких элементов состоит система и как эти элементы соединены между собой (независимо от вида схемы замещения).

Из опыта холостого хода путем измерения напряжения U_{10} , тока I_{10} и мощности $P_{10} = U_{10}I_{10} \cos \varphi_{10}$ мы можем определить угол сдвига между напряжением и током

$$\varphi_{10} = \arccos \frac{P_{10}}{U_{10}I_{10}} \quad (32,1)$$

и по значениям U_{10} , I_{10} и φ_{10} найти по величине и фазе полное сопротивление схемы (импеданс) со стороны первичных клемм при холостом ходе вторичной цепи, которое согласно уравнениям (31,9) равно отношению коэффициентов A и C :

$$Z_{10} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{U_{10}}{I_{10}} e^{j\varphi_{10}} = z_{10} e^{j\varphi_{10}} = \frac{A}{C} \quad (32,2)$$

Таким же образом может быть по напряжению $\dot{U}_{1k}$, току $\dot{I}_{1k}$ и мощности $P_{1k} = U_{1k}I_{1k} \cos \varphi_{1k}$ определено полное сопротивление со стороны первичных клемм при коротком замыкании вторичных зажимов:

$$Z_{1k} = \frac{\dot{U}_{1k}}{\dot{I}_{1k}} = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} e^{j\varphi_{1k}} = z_{1k} e^{j\varphi_{1k}} = \frac{B}{D} \quad (32,3)$$

Значения Z_{10} и Z_{1k} не зависят от того, при каком напряжении производятся опыты. Опыт холостого хода производится обыкновенно при нормальном напряжении, опыт же короткого замыкания во избежание

чрезмерных токов — при пониженном напряжении. Углы φ_{10} и φ_{1k} считаются положительными, когда ток отстает от напряжения, и отрицательными, когда напряжение отстает от тока.

Для заведомо симметричных систем достаточно ограничиться определением Z_{10} и Z_{1k} для одной какой-нибудь стороны, так как в этом случае $A=D$ и $A^2 - BC = 1$. В этом случае, деля и умножая уравнения (32,2) и (32,3), мы находим

$$\frac{B}{C} = Z_{10}Z_{1k}; \quad \frac{A^2}{BC} = \frac{Z_{10}}{Z_{1k}} = \frac{A^2}{A^2 - 1};$$

из этих уравнений мы можем определить A :

$$Z_{1k}A^2 = Z_{10}A^2 - Z_{10};$$

$$A = \sqrt{\frac{Z_{10}}{Z_{10} - Z_{1k}}}; \quad (32,4)$$

и на основании уравнений (32,2) и (32,3)

$$B = AZ_{1k} \text{ и } C = \frac{A}{Z_{10}}. \quad (32,5)$$

Если схема несимметрична, т. е. если $A \neq D$, то опыт холостого хода и короткого замыкания с одной стороны (первичной) недостаточен, и приходится производить, кроме того, со стороны вторичных клемм еще один опыт или холостого хода или короткого замыкания.

Если питать схему со стороны вторичных клемм (фиг. 83), то на основании уравнений (31,6) и (31,7) при холостом ходе, когда первичные клеммы разомкнуты ($I'_1 = 0$), соответствующий импеданс может быть определен на основании значений напряжения, тока и мощности U'_{20} , I'_{20} , $P'_{20} = U'_{20}I'_{20} \cos \varphi_{20}$ следующим образом:

$$Z_{20} = \frac{\dot{U}'_{20}}{\dot{I}'_{20}} = \frac{U'_{20}}{I'_{20}} e^{j\varphi_{20}} = \frac{D}{C}. \quad (32,6)$$

Вместо опыта холостого хода можно произвести опыт короткого замыкания, т. е. замкнуть накоротко первичные клеммы $U'_1 = 0$. Если опыт дает значения U'_{2k} , I'_{2k} и $P'_{2k} = U'_{2k}I'_{2k} \cos \varphi_{2k}$, то соответствующий импеданс будет

$$Z_{2k} = \frac{\dot{U}'_{2k}}{\dot{I}'_{2k}} = \frac{U'_{2k}}{I'_{2k}} e^{j\varphi_{2k}} = \frac{B}{A}. \quad (32,7)$$

Полученные значения Z_{10} , Z_{1k} , Z_{20} и Z_{2k} не являются произвольными. Если разделить уравнения (32,2) на (32,3) и (32,5) на (32,6), то получаются равенства

$$\frac{Z_{10}}{Z_{1k}} = \frac{AD}{BC}; \quad \frac{Z_{20}}{Z_{2k}} = \frac{AD}{BC} \quad \text{и} \quad \frac{Z_{10}}{Z_{1k}} = \frac{Z_{20}}{Z_{2k}}, \quad (32,8)$$

связывающие четыре импеданса. Поэтому достаточно определить три из них, определение четвертого может служить для контроля.

Если полные сопротивления холостого хода заменить соответствующими проводимостями

$$Y_{10} = \frac{1}{Z_{10}} = \frac{1}{z_{10} e^{j\varphi_{10}}} = y_{10} e^{-j\varphi_{10}}, \quad Y_{20} = \frac{1}{Z_{20}} = \frac{1}{z_{20} e^{j\varphi_{20}}} = y_{20} e^{-j\varphi_{20}},$$

то соотношение (32,8) может быть представлено в следующем виде:

$$Y_{10} Z_{1k} = Y_{20} Z_{2k},$$

или, если раскрыть комплексы, $y_{10} z_{1k} e^{j(\varphi_{1k} - \varphi_{10})} = y_{20} z_{2k} e^{j(\varphi_{2k} - \varphi_{20})}$, то

$$y_{10} z_{1k} = \frac{z_{1k}}{z_{10}} = y_{20} z_{2k} = \frac{z_{2k}}{z_{20}} \quad \text{и} \quad \varphi_{1k} - \varphi_{10} = \varphi_{2k} - \varphi_{20}. \quad (32,9)$$

Для вычислений коэффициентов A , B , C и D составляем уравнения:

$$1 - \frac{Z_{1k}}{Z_{10}} = 1 - \frac{BC}{AD} = \frac{AD - BC}{AD} = \frac{1}{AD}.$$

Затем, если разделить уравнение (32,3) на (32,6):

$$\frac{Z_{1k}}{Z_{2k}} = \frac{BA}{DB} = \frac{A}{D},$$

то из последних двух уравнений может быть определено A :

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{Z_{1k}}{Z_{2k}} \cdot \left(1 - \frac{Z_{1k}}{Z_{10}} \right) = \frac{Z_{1k} Z_{10}}{Z_{2k} (Z_{10} - Z_{1k})} = \frac{Z_{10}^2}{Z_{20} (Z_{10} - Z_{1k})} \\ A &= \sqrt{\frac{Z_{1k} Z_{10}}{Z_{2k} (Z_{10} - Z_{1k})}} = \sqrt{\frac{Z_{10}^2}{Z_{20} (Z_{10} - Z_{1k})}} = \\ &= \sqrt{\frac{Z_{10}}{Z_{20} - Z_{2k}}} = a e^{j\alpha}. \end{aligned} \quad (32,10)$$

Коэффициент a является передаточным числом между первичным и вторичным напряжениями при холостом ходе. Если система, связывающая первичную и вторичную цепи, имеет трансформаторы, то коэффициент a может иметь значения, сильно отличающиеся от единицы. Угол α есть угол сдвига между векторами первичного и вторичного напряжений при холостом ходе.

Зная коэффициент A , нетрудно определить и другие коэффициенты:

$$B = Z_{2k} A = z_{2k} e^{j\varphi_{2k}} a e^{j\alpha} = z_{2k} a e^{j(\varphi_{2k} + \alpha)} = b e^{j\beta}; \quad (32,11)$$

$$C = \frac{A}{Z_{10}} = y_{10} e^{-j\varphi_{10}} a e^{j\alpha} = y_{10} a e^{j(\alpha - \varphi_{10})} = c e^{j\gamma}; \quad (32,12)$$

$$D = \frac{B}{Z_{1k}} = \frac{Z_{2k} A}{Z_{1k}} = \frac{z_{2k} a}{z_{1k}} e^{j(\alpha + \varphi_{2k} - \varphi_{1k})} = d e^{j\delta}. \quad (32,13)$$

Угол α обыкновенно не поддается непосредственному определению, например, при передаче энергии на большие расстояния. В таких случаях коэффициент A приравнивают a (определяемому по отношению показаний вольтметров при холостом ходе в начале и конце линии), что соответствует одновременному повороту векторов первичного напряжения и тока на угол α , что для расчетов не играет роли.

Задача 23. Через симметричную электропередачу с фазовым напряжением 65 кВ питается подстанция с напряжением на низкой стороне порядка 3 500 В в фазе. Опыты холостого хода и короткого замыкания со стороны высокого напряжения дали:

$$U_{10} = 65 \text{ кВ}; I_{10} = 15 \text{ А}; P_{10} = 127 \text{ кВт (ток опережает напряжение)};$$

$$U_{1k} = 10,5 \text{ кВ}; I_{1k} = 100 \text{ А}; P_{1k} = 336 \text{ кВт (ток отстает от напряжения)}.$$

Опыт холостого хода со стороны низкого напряжения дал

$$U_{20} = 3,5 \text{ кВ}; I_{20} = 157 \text{ А}; P_{20} = 110 \text{ кВт (ток опережает напряжение)}.$$

Определить коэффициенты A, B, C и D , а также значение U_1, I_1, P_1 и $\cos \varphi_1$ для нагрузки в 7 000 кВт при напряжении $U_2 = 3 600 \text{ В}$ и $\cos \varphi_2 = 0,8$.

Решение. Определяем углы сдвига фаз: $\varphi_{10}, \varphi_{20}$ и φ_{1k} .

$$\varphi_{10} = -\arccos \cos \frac{P_{10}}{U_{10} I_{10}} = -\arccos \cos \frac{127\,000}{65\,000 \cdot 15} = -\arccos 0,13 = -82^\circ 30';$$

$$\varphi_{20} = -\arccos \cos \frac{P_{20}}{U_{20} I_{20}} = -\arccos \cos \frac{110\,000}{3\,500 \cdot 157} = -\arccos 0,2 = -78^\circ 30';$$

$$\varphi_{1k} = \arccos \cos \frac{P_{1k}}{U_{1k} I_{1k}} = \arccos \cos \frac{336\,000}{10\,500 \cdot 100} = \arccos 0,32 = 71^\circ 20';$$

Определяем импедансы холостого хода и короткого замыкания:

$$Z_{10} = \frac{U_{10}}{I_{10}} e^{j\varphi_{10}} = \frac{65\,000}{15} e^{-j82^\circ 30'} \Omega = 4\,340 e^{-j82^\circ 30'} \Omega;$$

$$Z_{1k} = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} e^{j\varphi_{1k}} = \frac{10\,500}{100} e^{j71^\circ 20'} \Omega = 105 e^{j71^\circ 20'} \Omega;$$

$$Z_{20} = \frac{U_{20}}{I_{20}} e^{j\varphi_{20}} = \frac{3\,500}{157} e^{-j78^\circ 30'} \Omega = 22,3 e^{-j78^\circ 30'} \Omega.$$

Определяем коэффициенты A, B, C и D :

$$A = \sqrt{\frac{Z_{10}^2}{Z_{20}(Z_{10} - Z_{1k})}} = \sqrt{\frac{4\,340^2 e^{-j2 \cdot 82^\circ 30'}}{22,3 e^{-j78^\circ 30'} (4\,340 e^{-j82^\circ 30'} - 105 e^{j71^\circ 20'})}};$$

$$Z_{10} - Z_{1k} = 4\,340 e^{-j82^\circ 30'} - 105 e^{j71^\circ 20'} \Omega = 531 + j4\,400 \Omega =$$

$$= 4\,430 e^{-j3^\circ 10'} \Omega;$$

$$A = \sqrt{\frac{4\,340^2 e^{-j2 \cdot 82^\circ 30'}}{22,3 \cdot 4\,430 e^{-j(78^\circ 30' + 3^\circ 10')}}} = 13,8 e^{-j1^\circ 40'};$$

$$B = AZ_{1k} = A \frac{Z_{1k} Z_{20}}{Z_{10}} = 13,8 e^{-j1^\circ 40'} \cdot \frac{105 \cdot e^{j71^\circ 20'} \cdot 22,3 e^{-j78^\circ 30'}}{4\,340 e^{-j82^\circ 30'}} \Omega = 7,45 e^{j78^\circ 40'} \Omega;$$

$$C = \frac{A}{Z_{10}} = \frac{13,8 e^{-j1^\circ 40'}}{4\,340 e^{-j82^\circ 30'}} \frac{1}{\Omega} = 0,00318 e^{j80^\circ 50'} \frac{1}{\Omega};$$

$$D = \frac{B}{Z_{1k}} = \frac{7,45 e^{j78^\circ 40'}}{105 e^{j71^\circ 20'}} = 0,0705 e^{j7^\circ 20'}.$$

Определяем $\dot{U}_1, \dot{I}_1, P_1$. Сначала находим $\dot{I}_2$:

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2 \cos \varphi_2} = \frac{7 \cdot 10^6}{3\,600 \cdot 0,8} = 2\,430 \text{ А},$$

$$\dot{I}_2 = 2\,430 e^{-j \arccos 0,8} \text{ А} = 2\,430 e^{-j36^\circ 50'} \text{ А};$$

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = 13,8e^{-j1^\circ40'} \cdot 3600 + 7,45e^{j73^\circ40'} \cdot 2430e^{-j36^\circ50'} \text{ В} = \\
 &= 49400e^{-j1^\circ40'} + 18000e^{j36^\circ50'} \text{ В} = 64100 \angle 8^\circ10' \text{ В}; \\
 \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 = 0,00318e^{-j30^\circ30'} \cdot 3600 + 0,0705e^{j2^\circ20'} \cdot 2430e^{-j36^\circ50'} \text{ А} = \\
 &= 11e^{j80^\circ50'} + 171e^{-j34^\circ30'} \text{ А} = 168e^{-j31^\circ} \text{ А}; \\
 \varphi_1 &= 8^\circ10' - (-31^\circ) = 39^\circ10'; \cos \varphi_1 = 0,786; \\
 P_1 &= U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 64100 \cdot 168 \cdot 0,786 \text{ Вт} = 8450 \text{ кВт}.
 \end{aligned}$$

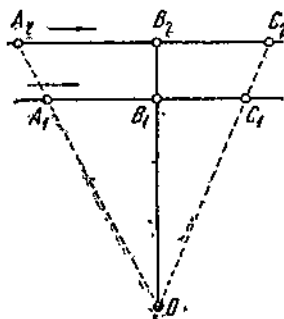
ГЛАВА ТРЕТЬЯ

КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

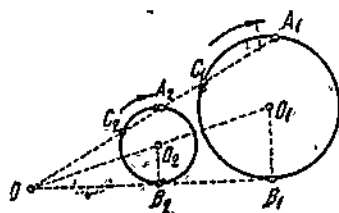
33. Прямые и обратные векторы

Для исследования цепей переменного тока в зависимости от различных условий нагрузки, например, при передаче энергии, в асинхронных моторах и т. д., можно применять графический метод, состоящий в нахождении обратных векторов и называемый методом инверсии.

Прежде чем перейти к изложению этого метода, выведем несколько геометрических положений, на которых основан метод инверсии.



Фиг. 84. Умножение векторов на числовой множитель.



Фиг. 85. Умножение векторов на числовой множитель.

1. От умножения или деления векторов, концы которых лежат на некотором геометрическом месте $A_1B_1C_1$, на некоторое постоянное число получается подобное геометрическое место, причем соответствующие точки лежат на одной прямой с началом векторов.

Так, если заданное геометрическое место — прямая $A_1B_1C_1$ (фиг. 84), то при умножении векторов на некоторый числовой множитель a мы получаем

$$OA_2 = OA_1 \cdot a; OB_2 = OB_1 \cdot a; OC_2 = OC_1 \cdot a,$$

или

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{OB_2}{OB_1} = \frac{OC_2}{OC_1} = a. \quad (33,1)$$

Новое геометрическое место представляет собой также прямую $A_2B_2C_2$.

Если кривая является окружностью $A_1B_1C_1$ (фиг. 85), то при делении векторов на a мы получаем, что

$$OA_2 = \frac{OA_1}{a}; OB_2 = \frac{OB_1}{a}; OC_2 = \frac{OC_1}{a},$$

или

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{OB_2}{OB_1} = \frac{OC_2}{OC_1} = \frac{1}{a}, \quad (33,2)$$

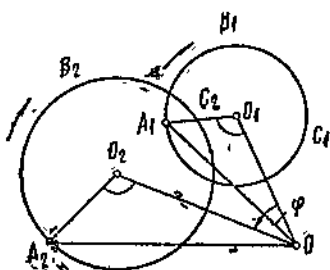
т. е. что новое геометрическое место с тем же началом векторов O представляется также окружностью, центр и радиус которой определяются из отношения

$$\frac{OO_2}{OO_1} = \frac{O_2B_2}{O_1B_1} = \frac{1}{a}. \quad (33,3)$$

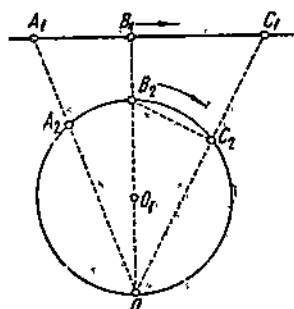
При умножении векторов геометрического места на какое-нибудь комплексное число, например, $re^{i\varphi}$, все векторы должны быть увеличены в отношении $r : 1$ и повернуты на угол φ против стрелки часов (фиг. 86):

$$\frac{OO_2}{OO_1} = \frac{O_2A_2}{O_1A_1} = r;$$

$$\angle O_1OO_2 = \varphi.$$



Фиг. 86. Умножение векторов на комплексный множитель.



Фиг. 87. Взаимно обратные кривые для случая, когда окружность проходит через начало векторов.

В случае если бы геометрическое место $A_1B_1C_1$ пришлось делить на $re^{i\varphi}$, то, уменьшив все векторы в отношении $r : 1$, полученное новое геометрическое место пришлось бы повернуть около точки O на угол φ по часовой стрелке.

Как при умножении векторов геометрического места, так и при их делении на какое-нибудь комплексное число при перемещении концов векторов по кривой $A_1B_1C_1$, предположим, в направлении, указанном стрелкой, концы полученных соответствующих векторов будут перемещаться по другой кривой $A_2B_2C_2$ в том же направлении.

II. Два проведенных из одной точки вектора, произведение которых равно постоянной величине, называются взаимно обратными или взаимно инвертными, а нахождение обратных векторов — инверсией.

Если геометрическое место прямых векторов задано какой-нибудь кривой, например, прямой линией (фиг. 87) $A_1B_1C_1$ с центром инверсии в точке O , то обратные векторы должны удовлетворять условию

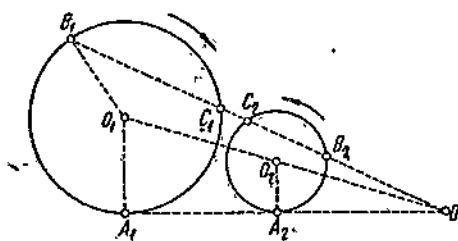
$$OA_1 \cdot OA_2 = OB_1 \cdot OB_2 = OC_1 \cdot OC_2 = k, \quad (33,4)$$

или

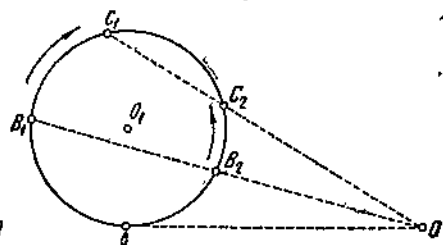
$$OA_2 = \frac{k}{OA_1}; \quad OB_2 = \frac{k}{OB_1}; \quad OC_2 = \frac{k}{OC_1}.$$

Кривая, обратная прямой, есть окружность, проходящая через начало векторов. Центр ее лежит на перпендикуляре к прямой. Действительно, пусть линия $OO_1B_2B_1$ перпендикулярна к $A_1B_1C_1$. Из подобия треугольников OB_1C_1 и OB_2C_2 , которые имеют общий острый угол у O и стороны которых пропорциональны: $\frac{OB_1}{OC_1} = \frac{OC_2}{OB_2}$, следует, что угол у любой точки C_2 всегда прямой, опирающийся на постоянный отрезок $OB_2 = \frac{k}{OB_1}$, т. е. что кривая $A_2B_2C_2$, обратная прямой $A_1B_1C_1$, есть окружность, проходящая через начало O .

Таким же образом можно доказать и обратную теорему, что если заданная кривая является окружностью, проходящей через начало векторов, то кривая обратных векторов представляется прямой, перпендикулярной к линии, соединяющей начало векторов с центром окружности.



Фиг. 88. Взаимно обратные кривые для случая, когда окружность не проходит через начало векторов.



Фиг. 89. Совпадающие окружности, взаимно обратные друг другу для случая, когда окружность не проходит через начало векторов.

Если кривая прямых векторов есть окружность, не проходящая через начало векторов, то кривая обратных векторов будет также окружностью, не проходящей через начало (фиг. 88). Расстояния соответственных точек от начала должны удовлетворять условию

$$OA_2 = \frac{k}{OA_1}; OB_2 = \frac{k}{OB_1}; OC_2 = \frac{k}{OC_1}.$$

Перемножая расстояния от начала до точек, принадлежащих к одной и той же окружности и лежащих на одной прямой,

$$OB_2 \cdot OC_2 = \frac{k^2}{OB_1 \cdot OC_1} = \frac{k^2}{OA_1^2} = \text{const},$$

мы на основании того, что произведение секущих равно квадрату касательной, находим, что кривая обратных векторов $A_2B_2C_2$ есть окружность. Следует обратить внимание на то, что при перемещении концов векторов одной окружности в каком-нибудь направлении, например, по часовой стрелке относительно своего центра, концы обратных векторов перемещаются по другой окружности в обратном направлении относительно центра этой второй окружности.

Можно так выбрать масштаб, что обе окружности будут совпадать (фиг. 89). Это упрощает построения и решения задач. Тогда

$$OB_1 \cdot OB_2 = OC_1 \cdot OC_2 = \text{const} = OA^2. \quad (33,5)$$

Если начало векторов O лежит внутри заданной окружности $A_1B_1C_1$ (фиг. 90), то по теореме о постоянстве произведения отрезков хорд, пересекающихся в одной точке:

$$OA_1 \cdot OA'_2 = OB_1 \cdot OB'_2 = OC_1 \cdot OC'_2 = \text{const},$$

обратный вектор по величине будет равен отрезку продолжения прямого вектора от центра инверсии до противоположной части окружности. Однако полученный отрезок OA'_2 имеет не направление прямого вектора OA_1 , а направление, ему противоположное. Поэтому, если мы

на направлениях прямых векторов OA_1, OB_1, OC_1

и т. д. отложим значения их обратных векторов

$OA_2 = OA'_1, OB_2 = OB'_1, OC_2 = OC'_1$, то получим инверсную кривую $A_2B_2C_2$,

представляющую собой такую же окружность, но

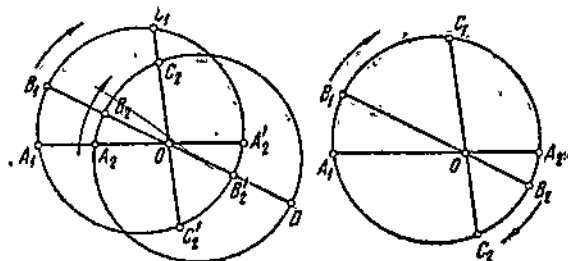
повернутую относительно центра инверсии O на 180° . Окружности $A_1B_1C_1$

и $A_2B_2C_2$ взаимно повернуты относительно центра

инверсии на 180° . Вместо того чтобы строить две окружности $A_1B_1C_1$ и

$A_2B_2C_2$, можно рассматривать одну и ту же окружность $A_1B_1C_1$ одновременно как кривую прямых и обратных векторов и отсчитывать обратные

векторы также от начала инверсии O , но только в противоположном направлении, т. е. обратные векторы будут повернуты на 180° .



Фиг. 90. Окружности, взаимно обратные друг другу в том случае, когда начало вектора лежит внутри заданной окружности.

34. Сопротивление и проводимость как обратные векторы

Полное сопротивление и полная проводимость электрической цепи являются величинами взаимно обратными: $ZY = 1$.

Для одной и той же цепи мы получим две различных диаграммы зависимости от того, будем ли мы для заданного тока находить соответствующее напряжение или же, наоборот, для данного напряжения

будем искать соответствующий ток. В первом случае (фиг. 91) мы принимаем за исходный вектор вектор тока $\dot{I} = m_I \cdot \overline{OI}$, расположенный по горизонтали. Определяем для этого тока активное падение напря-

жения $r\dot{I} = m_U \cdot \overline{OU_a}$ и к нему прибавляем индуктивное падение напря-

жения $jx\dot{I} = m_U \cdot \overline{OU_b}$, которое откладываем под прямым углом в сто-

рону вращения векторов, т. е. по положительному направлению оси $+j$. Искомое напряжение будет равно

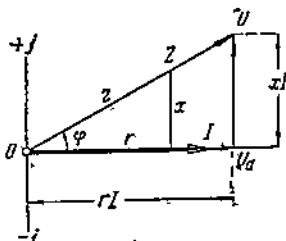
$$\dot{U} = r\dot{I} + jx\dot{I} = z\dot{I} e^{j\varphi} = Z\dot{I} = m_U \cdot \overline{OU_a} + m_U \cdot \overline{OU_b} = m_U \cdot \overline{OU}. \quad (34,1)$$

Сокращая на $\dot{I}$, мы получаем в выбранной нами системе координат,

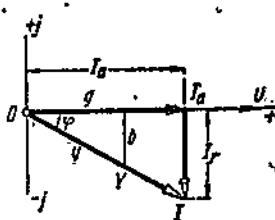
что отрезок полного сопротивления $Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = r + jx = m_Z \cdot \overline{OZ}$ по от-

ношению к начальному вектору тока, расположенному по оси действительных чисел, будет повернут против часовой стрелки на угол $\varphi = \arctg \frac{x}{r}$.

С другой стороны, для той же цепи, если исходить из заданного напряжения $\dot{U}$ и это напряжение откладывать также по оси действительных чисел $\dot{U} = m_U \cdot \overline{OU}$ (фиг. 92), то активная составляющая тока $\dot{I}_a = g\dot{U} = m_I \cdot \overline{OI_a}$ будет по направлению совпадать с напряжением (с горизонтальной осью $+$), а реактивная составляющая тока $\dot{I}_r = -jb\dot{U} = m_I \cdot \overline{OI_r}$ будет отставать на 90° (совпадать с осью $-j$) и вектор тока $\dot{I} = g\dot{U} - jb\dot{U} = y\dot{U}e^{-j\varphi} = Y\dot{U} = m_I \cdot \overline{OI} + m_I \cdot \overline{II} = m_I \cdot \overline{OI}$ (34,2) расположится ниже горизонтали (оси действительных чисел) под тем же углом φ .



Фиг. 91. Диаграмма для определения напряжения по заданному току.



Фиг. 92. Диаграмма для определения тока по заданному напряжению.

Сокращая на $\dot{U}$, мы получаем, что отрезок полной проводимости

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = g - jb = m_Y \cdot \overline{OY} \quad (34,3)$$

будет повернут по отношению к начальной (горизонтальной) оси на угол $\varphi = \arctg \frac{x}{r}$ по часовой стрелке.

Геометрические построения обратных векторов отличаются от данного построения тем, что они дают числовые значения прямого и обратного векторов на одной прямой и в одном направлении. Пусть, например, геометрическое место концов векторов полного сопротивления Z задано кривой $A_1B_1C_1$ (фиг. 93). Для точки A_1

$$Z = r + jx = ze^{j\varphi} = m_Z \cdot \overline{OA_1}, \quad (34,4)$$

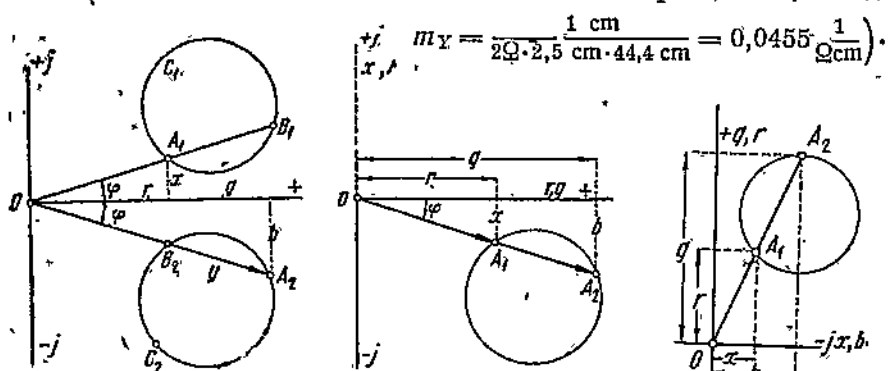
где m_Z — известный нам масштаб, указывающий, скольким омам соответствует единица длины чертежа, например, $m_Z = 2 \frac{\Omega}{\text{см}}$. Численное значение обратного вектора может быть измерено секущей OB_1 , лежащей на той же прямой OA_1 , если применить надлежащий масштаб m_Y для проводимости. Так как $zy = 1$, то, полагая, что $y = m_Y \cdot \overline{OB_1}$, мы из соотношения

$$1 = zy = m_Z \cdot \overline{OA_1} \cdot m_Y \cdot \overline{OB_1} \quad (34,5)$$

можем определить масштаб

$$m_Y = \frac{1}{m_Z \cdot OA_1 \cdot OB_1}, \quad (34,6)$$

в котором мы должны измерять на чертеже значения обратных векторов (пусть на чертеже $OA_1 = 2,5$ см и $OB_1 = 4,4$ см, тогда



Фиг. 93. Развернутая диаграмма полного сопротивления и полной проводимости.

Фиг. 94. Совмещенная диаграмма полного сопротивления и полной проводимости.

Фиг. 95. Совмещенная диаграмма полного сопротивления и полной проводимости.

Но если мы для обратных векторов хотим учесть и их фазу

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{r}{z^2} - j \frac{x}{z^2} = g - jb = ye^{-j\varphi} = m_Y \cdot \overline{OA_2}, \quad (34,7)$$

то на чертеже мы должны расположить этот вектор ниже горизонтали на такой же угол φ , на который прямой вектор $m_Z \cdot \overline{OA_1}$ лежит выше горизонтали. Геометрическое место концов обратных векторов для случая, когда геометрическое место прямых векторов является окружностью, представляет собой такую же окружность $A_2B_2C_2$, являющуюся зеркальным изображением первой окружности по отношению к горизонтали.

Чтобы не строить зеркальных изображений, обычно совмещают части чертежа, лежащие по обе стороны оси $O+$. Так как в большинстве случаев приходится находить значения тока при заданном напряжении или находить проводимость цепи, то совмещают обыкновенно верхнюю половину чертежа с нижней (фиг. 94).

При таком совмещении активное сопротивление r откладывается по направлению какой-нибудь начальной оси $O+$, а реактивное сопротивление индуктивности (положительные x) откладывается по оси $O(-j)$, повернутой на 90° в сторону вращения часовой стрелки по отношению к этой начальной оси.

Что касается проводимостей, то активная проводимость g откладывается на той же оси, что и r , а реактивная проводимость b при индуктивной нагрузке — по оси $O(-j)$. В случае емкостной нагрузки

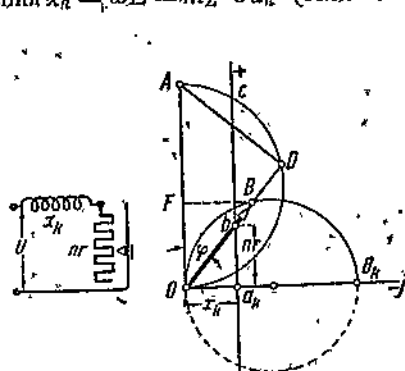
r и g откладываются также по оси $O+$, а реактивное сопротивление и реактивная проводимость откладываются по оси $O(+j)$.

В дальнейшем систему координат мы будем располагать таким образом, чтобы ось $O+$, на которой откладываются r и g , была направлена по вертикали вверх, а ось $O(-j)$ с откладываемыми на ней x и b , соответствующими индуктивной нагрузке, — по горизонтали слева направо (фиг. 95).

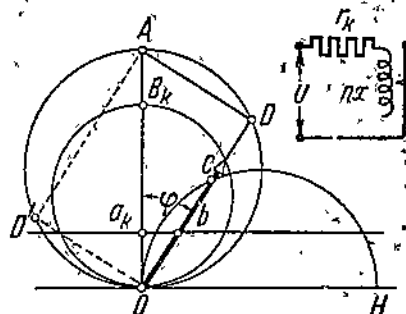
35. Простейшие круговые диаграммы

Рассмотрим, как меняется ток [в простых цепях переменного тока при постоянном внешнем напряжении, когда, например, индуктивное сопротивление в цепи постоянно, а меняется одно активное сопротивление (фиг. 96).

На основании предыдущего от точки O откладываем по горизонтали в некотором масштабе величину постоянного индуктивного сопротивления $x_k = \omega L = m_z \cdot Oa_k$ (если бы в цепи была постоянная емкость,



Фиг. 96. Круговая диаграмма (изменение тока) при постоянном внешнем напряжении для цепи с постоянным индуктивным и переменным активным сопротивлением.



Фиг. 97. Круговая диаграмма при постоянном внешнем напряжении для цепи с постоянным активным и переменным индуктивным сопротивлением.

то соответствующий реактанс пришлось бы отложить от точки O .

От точки a_k в том же масштабе откладываем под прямым углом (в сторону вращения векторов) переменное сопротивление $nr = m_z \cdot a_k b$, где n — переменный числовой множитель. Расстояние от начала до точки b представляет собой полное сопротивление цепи:

$$\sqrt{n^2 r^2 + x_k^2} = z = m_z \cdot Ob. \quad (35,1)$$

При изменении n конец вектора полного сопротивления Z перемещается по прямой $a_k b c$.

Конец вектора полной проводимости $Y = \frac{1}{Z}$, а также и конец вектора тока $I = YU$ при меняющемся сопротивлении цепи будут перемещаться (вследствие постоянства напряжения U) по окружностям, центры которых лежат на линии Oa_k . Так как ток и проводимость в нашем случае пропорциональны, то они могут быть представлены одним и тем же отрезком, только в разных масштабах. При коротком замы-

каний, когда $nr = 0$, полное сопротивление будет равно $x_k = m_z \cdot Oa_k$, а ток будет равен $I_k = \frac{\dot{U}}{x_k}$.

Отрезок OB_k , отложенный в определенном масштабе ($m_I \cdot OB_k = I_k$), и будет диаметром окружности, представляющей собой геометрическое место векторов тока. По мере увеличения сопротивления nr точка b удаляется по прямой $a_k c$ в бесконечность, а конец вектора $\dot{I}$ перемещается от точки B_k по дуге $B_k BO$, и наконец, когда $n = \infty$, вектор тока, отсекаемый на окружности направлением полного сопротивления, превращается в точку, и ток становится равным нулю. Угол сдвига между напряжением и током получается непосредственно на чертеже

$$\varphi = \arctg \frac{x_k}{nr} = \angle(\dot{U}, \dot{I}) = \angle AOB. \quad (35,2)$$

При $nr = \infty$ этот угол равен нулю; когда сопротивление nr очень велико по сравнению с x , ток в цепи почти совпадает по фазе с напряжением; по мере уменьшения сопротивления угол φ увеличивается и возрастает до прямого угла при коротком замыкании. Теоретически конец вектора тока может лежать и на нижней (пунктирной) части окружности, что соответствует отрицательному значению сопротивления. Такое отрицательное сопротивление можно представить себе таким образом, что во внешнюю цепь введена добавочная э. д. с., которая подобрана так, что она пропорциональна току и совпадает с ним по фазе.

Напряжение сети $\dot{U} = m_U \cdot \overline{OA}$ распадается на две слагающих: одну — совпадающую по фазе с током:

$$U_a = U \cos \varphi = nr I = m_U \cdot \overline{OD}, \quad (35,3)$$

и другую

$$U_r = U \sin \varphi = x_k I = m_U \cdot \overline{DA}, \quad (35,4)$$

опережающую ток на 90° , поэтому если на OA , как на диаметре, описать окружность, то продолжение вектора тока отсечет на ней отрезок, равный напряжению на концах сопротивления, $m_U \cdot \overline{OD} = nr I$.

Поглощаемая в этом сопротивлении мощность

$$P = nr I^2 = U_a I = U \cos \varphi I = U m_I \cdot \overline{OB} \cdot \cos \varphi = U m_I \cdot \overline{OF} = m_P \cdot \overline{OF} \quad (35,5)$$

может быть представлена в определенном масштабе отрезком OF (так как $U = \text{const}$). Масштаб мощности будет $m_P = U m_I$.

Таким образом отрезки одной и той же линии OB дают одновременно значения всех величин, характеризующих состояние цепи при определенной нагрузке.

При постоянном сопротивлении цепи r_k и переменном реактивном сопротивлении x (индуктивности или емкости) геометрическое место концов полных сопротивлений будет перемещаться по прямой линии, которая отстоит от начала инверсии на расстоянии $Oa_k = \frac{r_k}{m_z}$ (фиг. 97).

При индуктивной нагрузке реактанс $px = \omega L = m_z \cdot a_k b$ должен быть

Затем под углом φ к вертикальной линии проводим прямую bc . При изменении сопротивления внешней цепи nZ соответствующие значения этого сопротивления на чертеже будут представляться отрезками bc

$$nZ = m_Z \cdot \overline{bc}, \quad (35,9)$$

причем по мере уменьшения сопротивления внешней цепи nZ точка c будет перемещаться из бесконечности к точке b . При коротком замыкании, т. е. когда $n=0$, точка c совпадает с точкой b . Складывая постоянное сопротивление $Z_k = m_Z \cdot \overline{Ob}$ с переменным сопротивлением $nZ = m_Z \cdot \overline{bc}$, мы находим, что геометрическое место концов векторов полного сопротивления всей цепи $Z_k + nZ = m_Z \cdot \overline{Oc}$ есть прямая bc .

Геометрическим местом векторов проводимостей, т. е. обратных векторов, будет окружность, проходящая через начало инверсии O , центр которой лежит на перпендикуляре Og , опущенном из O на прямую bc . Для построения этой окружности нам необходимо знать еще одну точку окружности; для этого определим вектор проводимости при коротком замыкании. Вектор этот будет на чертеже направлен по линии Ob , и величина его будет равна $y_k = \frac{1}{z_k} = \frac{1}{\sqrt{r_k^2 + x_k^2}}$.

Откладываем эту проводимость в удобном для вычерчивания масштабе $y_k = m_Y \cdot \overline{Ob_k}$ и затем через точки O и B_k проводим окружность, для чего из точки B_k проводим перпендикуляр к OB_k , пересечение которого с линией Og , перпендикулярной bc , и даст другой конец диаметра искомой окружности.

При помощи этой диаграммы мы для каждого значения сопротивления $nZ = m_Z \cdot \overline{bc}$ можем найти соответствующее значение полной проводимости по величине и фазе: $Y = m_Y \cdot \overline{Ob}$.

Если мы умножим проводимость на напряжение U_1 , то на том же чертеже мы можем отсчитать значение тока

$$i = YU_1 = U_1 m_Y \cdot \overline{Ob} = m_I \cdot \overline{Ob}, \quad (35,10)$$

причем масштаб, в котором измеряется ток, будет равен $m_I = U_1 m_Y$.

При разомкнутой цепи, $n = \infty$, луч Oc становится параллельным bc , и вектор тока сокращается до точки — ток равен нулю. По мере уменьшения сопротивления $nZ = m_Z \cdot \overline{bc}$ конец вектора тока B перемещается по окружности от точки O к точке B_k и при коротком замыкании, когда ток достигает своей максимальной величины, точка B совпадает с точкой B_k . Рабочая часть окружности будет ограничена дугой $OB B_k$.

Так как напряжение отложено по вертикали, то $\angle U_1 OB = \varphi_1$ дает нам угол сдвига между внешним напряжением и током. Если около O провести окружность радиусом, равным единице, то проекция такого радиуса, совпадающего с направлением тока, на вертикальную линию дает значение $\cos \varphi_1$ или коэффициента мощности источника тока при данной нагрузке: $\cos \varphi_1 = Od$.

Если постоянный отрезок OB_k приравнять внешнему напряжению U_1 или $m_Y \cdot \overline{Ob_k} = U_1$, то отрезок BB_k дает значение (но не фазу) напряжения у зажимов переменного сопротивления nZ . Действительно, если стороны треугольника сопротивлений Obc умножить на значение тока I ,

то, сторона Ob будет пропорциональна падению напряжения и построенном сопротивлении Iz_k , сторона bc — напряжению на зажимах сопротивления $I\pi z = U$, а замыкающая сторона Oc будет пропорциональна внешнему напряжению U_1 . Сторона Oc этого треугольника, соответствующая постоянному внешнему напряжению U_1 , имеет переменную длину; поэтому мы треугольник Obc заменяем подобным ему треугольником OBV_k , как имеющим общий угол BOB_k и пропорциональные стороны $OB \cdot Oc = OB_k \cdot Ob$ или $\frac{OB}{Ob} = \frac{OB_k}{Oc} = \frac{BV_k}{bc}$ (так как окружность и прямая bc — взаимно обратные кривые). Отсюда видно, что стороны этого треугольника OBV_k также будут соответственно пропорциональны напряжениям. Сторона OB , пропорциональная Ob , будет пропорциональна напряжению $z_k I$, сторона BV_k , пропорциональная bc , будет пропорциональна $\pi z I = U$, а сторона OB_k , имеющая в этом треугольнике постоянную длину, будет пропорциональна внешнему напряжению U_1 , как пропорциональная стороне Oc . Поэтому, если мы отрезок OB_k приравняем U_1 или $U_1 = m_U \cdot OB_k$, то отрезки OB и BV_k дадут в том же масштабе падение напряжения в постоянном сопротивлении z_k и напряжение у зажимов переменного сопротивления πz :

$$z_k I = m_U \cdot OB \text{ и } U = \pi z I = m_U \cdot BV_k. \quad (35,11)$$

На этой круговой диаграмме можно получить как мощность всей цепи, которая будет представлена в масштабе $m_{P1} = U_1 m_1$ отрезком BD_1 ,

$$P_1 = U_1 I \cos \varphi_1 = U_1 m_1 \cdot BD_1 = m_{P1} \cdot BD_1, \quad (35,12)$$

так и мощность, поглощаемую в сопротивлении πz . Эта последняя мощность выражается через

$$P = UI \cos \varphi = m_U m_I \cdot BV_k \cdot OB \cdot \cos \varphi. \quad (35,13)$$

Если через точку B провести линию BD_2 , параллельную bc , то из подобия треугольников OD_2B и OBV_k , подобных в свою очередь треугольнику Obc , следует, что

$$\frac{BV_k}{OB_k} = \frac{BD_2}{OB}, \text{ или } BV_k \cdot OB = OB_k \cdot BD_2, \quad (35,14)$$

а отсюда мы получаем, что мощность, поглощаемая в сопротивлении πz ,

$$P = UI \cos \varphi = m_U \cdot m_I \cdot OB_k \cdot BD_2 \cdot \cos \varphi = U_1 m_1 \cdot \cos \varphi \cdot BD_2 \quad (35,14)$$

может быть в определенном масштабе $m_P = U_1 m_1 \cos \varphi$ измерена отрезком BD_2 .

Наибольшее значение мощности P мы будем иметь, когда точка B будет находиться в точке касания касательной, проведенной к окружности параллельно линии OB_k .

В этом случае треугольник OBV_k , а также треугольник сопротивлений Obc будут равнобедренны, т. е. $\pi z = z_k$, т. е. когда числовые значения постоянного и переменного сопротивлений будут равны между собой (ср. § 16).

На этой диаграмме можно получить еще отношение мощности, поглощаемой в переменном сопротивлении, к мощности всей цепи, т. е. к. п. д. цепи

$$\eta = \frac{P}{P_1} = \frac{U_1 m_I \cos \varphi \cdot BD_2}{U_1 m_I \cdot BD_1} = \frac{BD_2}{BD_1} \cos \varphi. \quad (35,15)$$

Для более удобного отсчета этого отношения на чертеже проводим из точки O линию, параллельную bc , и затем произвольную горизонтальную линию LM . Мы получаем две пары подобных треугольников: OBK и OLM , дающих отношение $\frac{OK}{BK} = \frac{LM}{OL}$, и OKD_2 и OLN , дающих отношение $\frac{D_2K}{OK} = \frac{OL}{LN}$.

Если перемножить эти две пропорции и каждую полученную часть вычесть из единицы, то получаем

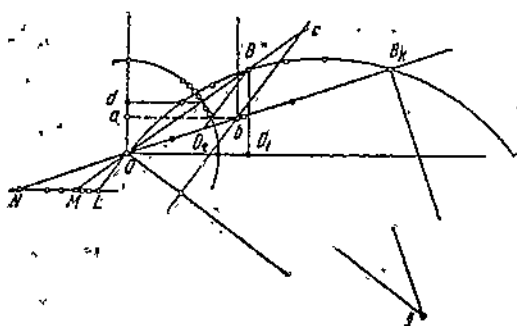
$$\frac{D_2K}{BK} = \frac{LM}{LN}; \quad \frac{BK - D_2K}{BK} = \frac{LN - LM}{LN}; \quad \frac{BD_2}{BK} = \frac{MN}{LN},$$

но так как $BD_1 = BK \cos \varphi$, то мы находим, что отношение мощностей

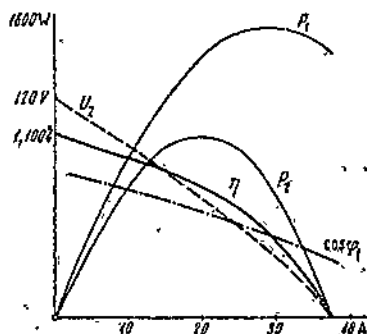
$$\eta = \frac{P}{P_1} = \frac{BD_2}{BK \cos \varphi} \cdot \cos \varphi = \frac{MN}{LN} \quad (35,16)$$

определяется отношением отрезка MN , отсекаемого направлением тока, к постоянному отрезку LN , поэтому, если LN выбрать так, чтобы он равнялся 100, например, 100 мм, то отрезок MN даст непосредственно это отношение в процентах.

Задача 24. Приемник энергии с постоянным $\cos \varphi = 0,8$ питается через сопротивление $Z_k = 1 + j3$ от постоянного напряжения $U_1 = 120$ В. Построить кривые, дающие напряжение и мощность у приемника энергии, мощность, коэффициент мощности и к. п. д. всей цепи в зависимости от тока в цепи.



Фиг. 99а. К задаче 24.



Фиг. 99б. К задаче 24.

Решение. Строим круговую диаграмму согласно указаниям § 35 (фиг. 99а), причем масштаб тока выбираем равным $m_I = 0,5 \frac{A}{mm}$.

Масштаб напряжения

$$m_U = \frac{U_1}{OB_k} = \frac{120 \text{ В}}{76 \text{ мм}} = 1,625 \frac{\text{В}}{\text{мм}}.$$

Масштаб полной мощности

$$m_{P_1} = U_1 m_I = 120 \text{ В} \cdot 0,5 \frac{\text{А}}{\text{мм}} = 60 \frac{\text{В}}{\text{мм}}$$

Масштаб вторичной мощности

$$m_P = U_1 m_I \cdot \cos \varphi = 120 \text{ В} \cdot 0,5 \frac{\text{А}}{\text{мм}} \cdot 0,8 = 48 \frac{\text{В}}{\text{мм}}$$

Радиус окружности для определения $\cos \varphi_1$ берем равным 25 мм, тогда

$$\cos \varphi_1 = \frac{Od}{25 \text{ мм}}$$

Отрезок LN берем равным 50 мм, тогда

$$\eta = \frac{MN}{50 \text{ мм}} \cdot 100\%$$

Кривые U_2 , P_1 , P_2 , $\cos \varphi_1$, η (фиг. 99b) построены по точкам, найденным из круговой диаграммы.

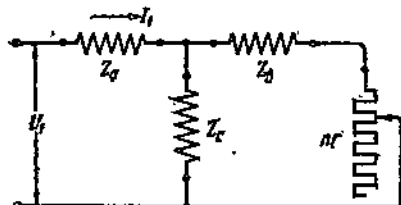
36. Круговая диаграмма общей схемы замещения

Одна из общих схем замещения, которая может быть положена в основу при рассмотрении рабочего процесса в трансформаторах, асинхронных двигателях, длинных линиях и электропередачах, изображена на фиг. 100. Она состоит из сопротивления Z_a , соединенного последовательно с двумя параллельными ветвями, в одной из которых сопротивление Z_c не меняется, а в другой последовательно с постоянным сопротивлением Z_b включается однородное сопротивление $nZ = nze^{j\varphi}$ с постоянным углом сдвига. Покажем, пользуясь методом инверсии, что при изменении сопротивления nZ конец вектора первичного тока I_1 перемещается по окружности, т. е. что для схемы получается круговая диаграмма.

Чтобы это доказать, разобьем задачу на три части:

1

Найдем сначала геометрическое место векторов полного сопротивления и полной проводимости правой ветви (фиг. 100). Для этого откладываем в произвольном масштабе m_{Z_2} (фиг. 101) постоянное сопротивление всей правой ветви (вторичной цепи)



Фиг. 100. Общая схема замещения.

$$r_b = m_{Z_2} \cdot O_2 a;$$

$$x_b = m_{Z_2} \cdot ab;$$

$$z_2 = \sqrt{r_b^2 + x_b^2} = m_{Z_2} \cdot O_2 b.$$

Затем через точку b проводим линию bc . Предположим, что сопротивление nZ представляет собой чисто активное сопротивление. Так как в этом случае угол $\varphi = 0$, то геометрическое место полных сопротивлений будет вертикальной линией bc . Кривая проводимостей будет окружностью. Она будет проходить через начало данной инверсии O_2 и центр ее будет лежать на горизонтали $O_2 d$. Проводим окружность произвольного диаметра $O_2 d$ и приравняем этот диаметр проводимости правой ветви в том случае, когда в последней нет активного сопротивления

$$\frac{1}{x_b} = m_{Y_2} \cdot O_2 d, \quad (36,1)$$

откуда и определяется масштаб

$$m_{Y_2} = \frac{1}{x_b \cdot O_2 d}, \quad (36,2)$$

в котором будет измеряться проводимость всей правой ветви:

$$\frac{1}{\sqrt{x_b^2 + (r_b + m)^2}} = m_{Y_2} \cdot O_2 p. \quad (36,3)$$

При коротком замыкании правой ветви, $mr = 0$, проводимость правой ветви будет определяться линией $O_2 p_h$. Таким образом при изменении внешнего сопротивления mr от бесконечности до нуля конец вектора проводимости перемещается по дуге окружности $O_1 p p_h$ между точками O_2 и p_h .

Значение активной слагающей проводимости правой ветви будет равно проекции отрезка $O_2 p$ на вертикальную ось, а значение реактивной проводимости — проекции на горизонтальную ось.

II

Определяем проводимость, а затем сопротивление двух параллельных ветвей, ответвления Z_c и правой ветви $Z_b + mr$. Проводимости при параллельном соединении складываются геометрически, поэтому к проводимости правой ветви $O_2 p$ мы должны приложить проводимость ответвления, т. е. у конца отрезка $O_2 p$ построить отрезок, который представлял бы собой проводимость ответвления

$$Y_c = \frac{1}{Z_c} = \frac{r_c}{z_c^2} - j \frac{x_c}{z_c^2} = g_c - j b_c.$$

Так как безразлично, в каком порядке производить геометрическое сложение, то ввиду постоянства Y_c удобнее на чертеже отложить сначала проводимость Y_c , а затем от его конца уже откладывать переменные проводимости правой ветви.

Для этого мы откладываем вниз $g_c = \frac{r_c}{z_c^2} = m_{Y_2} \cdot O_2 h$ и

влево от точки h откладываем $b_c = \frac{x_c}{z_c^2} = m_{Y_2} \cdot hO$, тогда отрезок OO_2 по величине и направлению представит собой проводимость ответвления

$$Y_c = \frac{1}{Z_c} = m_{Y_2} \cdot \overline{OO_2}. \quad (36,4)$$

Прикладывая к этой проводимости проводимость правой ветви, мы получаем, что проводимость обеих параллельных ветвей будет определяться отрезками Op , концы которых лежат на дуге $O_2 p p_h$ и измеряться масштабами m_{Y_2} . При разомкнутой правой ветви проводимость определяется отрезком OO_2 , а при коротком замыкании внешнего сопротивления общая проводимость будет равна отрезку Op_h .

Для нахождения полного сопротивления обеих параллельных ветвей мы должны будем найти векторы, обратные векторам проводимости. Так как кривой обратной окружности может служить та же окружность, то мы можем рассматривать окружность $O_2 p p_h d$ как обратную кривую. Прямому вектору проводимости Op на чертеже будет соответствовать обратный вектор сопротивления Oq , определяемый отрезком между точкой O и другой точкой q пересечения окружности линией Op . Для определения масштаба сопротивления, который в данном случае не является произвольным, выберем наиболее простой в этом отношении режим, когда правая ветвь разомкнута и ее проводимость равна нулю. Тогда проводимость двух параллельных ветвей на чертеже определяется отрезком OO_2 , а обратная ей величина сопротивления

$z_c = \frac{1}{y_c} = \sqrt{r_c^2 + x_c^2}$ — отрезком Oq_0 , совпадающим по направлению с OO_2 .

Поэтому, измерив на чертеже длину отрезка Oq_0 , мы можем определить и масштаб для измерения сопротивления обеих параллельных ветвей

$$Z_c = \sqrt{r_c^2 + x_c^2} = m_{Z_1} \cdot Oq_0$$

откуда

$$m_{Z_1} = \frac{\sqrt{r_c^2 + x_c^2}}{Oq_0} \quad (36,5)$$

Таким образом сопротивление обеих параллельных ветвей при разомкнутой правой ветви определяется отрезком Oq_0 . При коротком же замыкании внешнего сопротивления n ($n=0$) сопротивление будет определяться отрезком Oq_k как отрезком, обратным отрезку Op_k .

Рабочая часть окружности ограничивается дугой q_0q_k от точки q_0 до точки q_k .

III

Теперь мы, можем определить сопротивление всей схемы. Для этого необходимо к сопротивлению обеих параллельных ветвей $m_{Z_1} \cdot Oq$ прибавить в том же масштабе сопротивление Z_a , включенное перед параллельными ветвями. Это мы осуществляем таким образом: откладываем от точки O по вертикали вниз $r_a = m_{Z_1} \cdot Ok$ и влево по горизонтали $x_a = m_{Z_1} \cdot kO_1$. Полученный отрезок $\overline{O_1O}$ по величине и направлению будет $Z_a = m_{Z_1} \cdot \overline{O_1O}$. Сумма векторов $\overline{O_1O}$ и $\overline{Oq}$ дает в масштабе m_{Z_1} полное сопротивление всей схемы ($\overline{O_1q}$), при этом конец суммарного вектора сопротивления перемещается от точки q_0 при разомкнутой правой ветви через точку q до точки q_k при коротком замыкании.

Для того чтобы определить первичный ток i_1 , осталось определить проводимость всей схемы, которая измеряется векторами, обратными векторам сопротивления. Прямому вектору сопротивления O_1q соответствует обратный вектор проводимости O_1B . При разомкнутой правой ветви или так называемом холостом ходе вектор проводимости будет представлен отрезком O_1B_0 , отсекаемым окружностью на прямой O_1q_0 . Для короткого замыкания внешней цепи полную проводимость O_1B_k мы получим, если продолжим O_1q_k до другой точки пересечения с окружностью. Масштаб для измерения проводимости всей схемы проще всего определить, исходя из рассмотрения ненагруженной схемы, когда $n = \infty$.

В этом случае цепь состоит из последовательно соединенных сопротивлений Z_a и Z_c , и проводимости цепи будет равна

$$\frac{1}{\sqrt{(r_a + r_c)^2 + (x_a + x_c)^2}} = m_{Y_1} \cdot O_1B_0 \quad (36,6)$$

Из последнего соотношения может быть вычислен масштаб m_{Y_1} .

Если общую проводимость умножить на первичное напряжение, мы получим первичный ток.

Таким образом ток при разомкнутой правой ветви (холостом ходе) на круговой диаграмме определяется отрезком O_1B_0 :

$$I_{10} = \frac{U_1 e^{-i\varphi_0}}{\sqrt{(r_a + r_c)^2 + (x_a + x_c)^2}} = U_1 m_{Y_1} \cdot \overline{O_1B_0} = m_I \cdot \overline{O_1B_0} \quad (36,7)$$

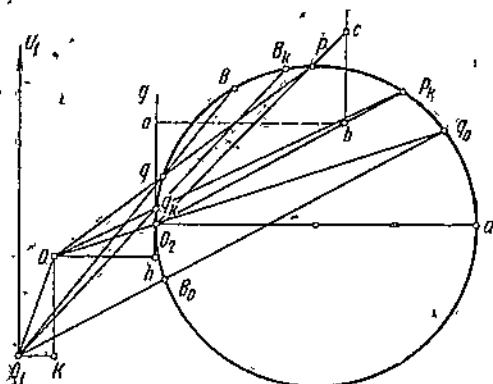
При нагрузке, определяемой отрезком bc , первичный ток будет $I_1 = m_I \cdot \overline{O_1B}$, а при коротком замыкании переменного сопротивления правой ветви (внешней цепи) $I_{1k} = m_I \cdot \overline{O_1B_k}$.

Таким образом мы показали, как путем последовательных инверсий можно найти для заданной схемы геометрическое место концов первичного тока при

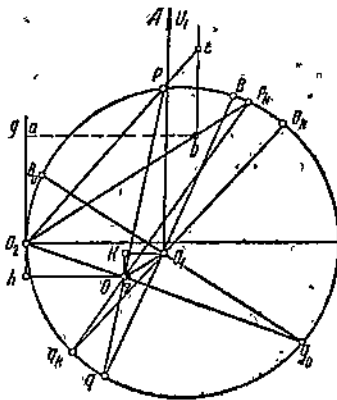
постоянным первичном напряжении и переменном сопротивлении во внешней цепи. Это геометрическое место представляет собой часть окружности ($B_0 B K$).

Мы ограничимся лишь нахождением первичного тока. Остальные величины, которые могут интересовать нас в этой схеме, как-то: ток во внешней цепи; напряжение и мощность вторичной цепи; к. п. д. и т. д., гораздо проще выводятся, если исходить из векторных уравнений (см. § 38).

При построении диаграммы фиг. 101 мы предполагали, что все элементы, входящие в общую схему, имеют индуктивный характер. Если в отдельных частях входят емкости, то хотя круговая диаграмма строится таким же образом, но в конечном результате она получает другое расположение (фиг. 102).



Фиг. 101. Круговая диаграмма схемы замещения.



Фиг. 102. Круговая диаграмма схемы замещения.

Пусть емкость входит в ответвлении Z_c ; сопротивление и проводимость правой ветви строятся таким же образом, как и в предыдущем примере:

$$r_b = m_{Z_b} \cdot O_2 a; \quad x_b = m_{Z_b} \cdot ab; \quad Z_b = m_{Z_b} \cdot \overline{O_2 b};$$

$$Z_b + nr = m_{Z_b} \cdot (\overline{O_2 b} + \overline{b\bar{c}}) = m_{Z_b} \cdot \overline{O_2 c}; \quad (36,8)$$

проводимость при холостом ходе равна нулю, при коротком замыкании

$$\frac{1}{\sqrt{r_b^2 + x_b^2}} = m_{Y_2} \cdot O_2 p_k \quad (36,9)$$

Проводимость же ответвления, равная

$$Y_c = \frac{1}{Z_c} = \frac{r_0}{\left(r_b^2 + \frac{1}{\omega^2 C_c^2}\right)} + j \frac{\frac{1}{\omega C_c}}{r_b^2 + \frac{1}{\omega^2 C_c^2}} = g_c + j b_c, \quad (36,10)$$

откладывается своей активной частью вниз; $g_c = m_{Y_2} \cdot O_2 h$, а реактивной — влево, а вправо: $b_c = m_{Y_2} \cdot hO$, так что проводимость ответвления получается в виде отрезка OO_2 , и центр инверсии O для определения сопротивления обеих ветвей располагается внутри окружности. Поэтому, инвертируя эквивалентные проводимости обеих параллельных ветвей при холостом ходе $m_{Y_2} \cdot OO_2$, при нагрузке $m_{Y_2} \cdot Op$ и при коротком замыкании $m_{Y_2} \cdot Or_k$, мы получаем соответствующие обратные векторы сопротивлений $Z_c = m_{Z_1} \cdot Oq_0$; Oq и Oq_k , которые направлены в стороны, противоположные проводимостям

Поэтому, прибавляя к эквивалентному сопротивлению обеих параллельных ветвей сопротивление Z_a , мы слагающие Z_a должны откладывать также в противоположном направлении, а именно $r_a = m_{Z_1} \cdot Ok$ — не вниз, а вверх, и $x_a = m_{Z_1} \cdot kO_1$ — не влево, а вправо. Таким образом полное сопротивление всей схемы сложится из сопротивления $Z_a = m_{Z_1} \cdot \overline{O_1O}$, имеющего направление от точки O_1 к точке O , и из сопротивлений обеих параллельных ветвей: для холостого хода

$$m_{Z_1} \cdot (\overline{O_1O} + \overline{Oq_0}) = m_{Z_1} \cdot \overline{O_1q_0}$$

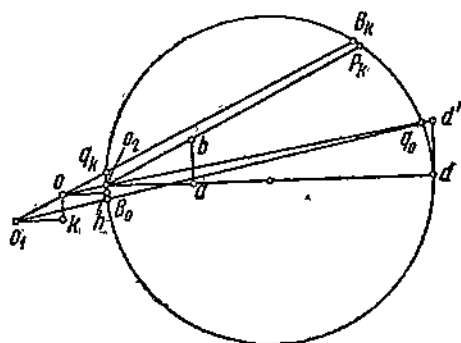
для нагрузки $m_{Z_1} \cdot (\overline{O_1O} + \overline{Oq}) = m_{Z_1} \cdot \overline{O_1q}$ и для короткого замыкания

$$m_{Z_1} (\overline{O_1O} + \overline{Oq_k}) = m_{Z_1} \cdot \overline{O_1q_k}$$

Инвертируя относительно нового центра O_1 векторы полных сопротивлений всей схемы, мы получим векторы полных проводимостей всей схемы: для холостого хода

$$\frac{1}{\sqrt{(r_a + r_c)^2 + (x_a + x_c)^2}} = m_{Y_1} \cdot O_1B_0 \quad (36,11)$$

для нагрузки $m_{Y_1} \cdot O_1B$ и для короткого замыкания $m_{Y_1} \cdot O_1B_k$.



Фиг. 103. К задаче 25.

Если умножить проводимость всей схемы на первичное напряжение U_1 , то мы из круговой диаграммы можем получить по величине и направлению ток холостого хода

$$I_{10} = U_1 m_{Y_1} \cdot \overline{O_1B_0} = m_I \cdot \overline{O_1B_0} \quad (36,12)$$

ток, при нагрузке $I_1 = m_I \cdot \overline{O_1B}$ и при коротком замыкании $I_{1k} = m_I \cdot \overline{O_1B_k}$.

Первичное напряжение направлено по линии O_1A , и рабочей частью окружности является дуга B_0BB_k .

Задача 25. Построить круговую диаграмму первичного то-

ка I_1 для схемы фиг. 100, когда $Z_a = 2 + j4 \Omega$; $Z_c = 5 + j30 \Omega$; $Z_b = 2 + j4 \Omega$; $U_1 = 500 \text{ V}$ и $\cos \varphi = 1$.

Решение. Выбираем для сопротивления правой ветви масштаб $m_{Z_2} = 0,2 \frac{\Omega}{\text{мм}}$ и откладываем $O_2a = \frac{4}{0,2} \text{ мм} = 20 \text{ мм}$; $ab = \frac{2}{0,2} \text{ мм} = 10 \text{ мм}$ (фиг. 103).

Для проводимостей двух параллельных ветвей выбираем масштаб $m_{Y_2} = \frac{1}{300 \text{ мм}}$, тогда диаметр окружности получается равным

$$O_2d = \frac{1}{x_b} : m_{Y_2} = \frac{1}{4} : \frac{1}{300} \text{ мм} = 75 \text{ мм}.$$

В этом масштабе мы должны построить проводимость ответвления

$$g_c = \frac{5}{5^2 + 30^2} \cdot \frac{1}{\Omega} = 0,00541 \frac{1}{\Omega}; \quad b_c = \frac{30}{5^2 + 30^2} \cdot \frac{1}{\Omega} = 0,0324 \frac{1}{\Omega}.$$

На чертеже соответствующие отрезки будут

$$O_2h = \frac{g_c}{m_{Y_2}} = 0,00541 : \frac{1}{300} \text{ мм} = 1,62 \text{ мм} \text{ и } hO = \frac{b_c}{m_{Y_2}} = \\ = 0,00324 : \frac{1}{300} \text{ мм} = 9,72 \text{ мм},$$

Продолжаем линию OO_2 до пересечения с окружностью. Так как отрезок OO_2 очень мал, то, чтобы правильно провести прямую OO_2g_{01} , откладываем у точки d ординату, равную

$$O_2d \cdot \frac{g_c}{b_c} = O_2d \cdot \frac{r_c}{x_c} = 75 \cdot \frac{5}{30} \text{ мм} = 12,5 \text{ мм}.$$

Длину хорды $Oq_0 = 84 \text{ мм}$ мы должны приравнять сопротивлению ответвления

$$z_3 = \sqrt{5^2 + 30^2} \Omega = 30,4 \Omega,$$

поэтому масштаб сопротивления

$$m_{Z_1} = \frac{z_c}{Oq_0} = \frac{30,4 \Omega}{84 \text{ мм}} = 0,362 \frac{\Omega}{\text{мм}}.$$

В этом масштабе откладываем сопротивления r_a и x_a :

$$\{Ok = \frac{r_a}{m_{Z_1}} = \frac{2}{0,362} \text{ мм} = 5,5 \text{ мм}; \quad kO_1 = \frac{x_a}{m_{Z_1}} = \frac{4}{0,362} \text{ мм} = 11 \text{ мм}.$$

Полное сопротивление всей схемы при холостом ходе равно

$$\sqrt{(r_c + r_a)^2 + (x_c + x_a)^2} = \sqrt{(5 + 2)^2 + (30 + 4)^2} = 34,8 \Omega,$$

полная же проводимость всей схемы при холостом ходе будет равна

$$\frac{1}{34,8 \Omega} = 0,0288 \frac{1}{\Omega},$$

и измеряется эта проводимость на чертеже отрезком $O_1B_0 = 21,2 \text{ мм}$; поэтому масштаб для проводимости всей схемы будет

$$m_{Y_1} = 0,0288 : 21,2 \frac{1}{\text{мм}} = 0,00136 \frac{1}{\text{мм}},$$

а масштаб для токов будет

$$m_I = U_1 \cdot m_{Y_1} = 500 \cdot 0,00136 \frac{\text{А}}{\text{мм}} = 0,68 \frac{\text{А}}{\text{мм}}.$$

Ток холостого хода равен

$$I_{10} = m_I \cdot O_1B_0 = 0,68 \cdot 21,2 \text{ А} = 14,4 \text{ А},$$

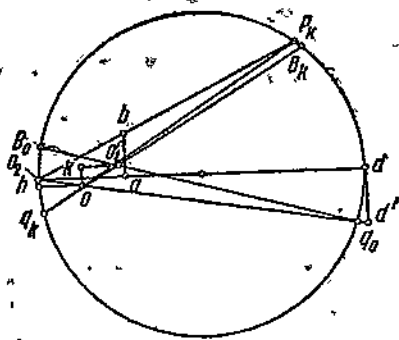
а ток короткого замыкания

$$I_{1k} = m_I \cdot O_1B_k = 0,68 \cdot 88 \text{ А} = 59,8 \text{ А}.$$

Задача 26. Построить круговую диаграмму для той же схемы в предположении, что $Z_a = Z_b = 2 + j4 \Omega$; но в ответвлении имеется емкость

$$Z_c = r_c - j \frac{1}{\omega C_c} = r_c - jx_c = 5 - j30 \Omega; \quad U_1 = 500 \text{ В}.$$

Решение. Повторяем построение аналогично предыдущей задаче с той разницей, что сопротивления и проводимости откладываются в противоположные стороны (фиг. 104). Масштабы m_{Z_2} и m_{Y_2} выбираем теми же, что и в предыдущей задаче:



Фиг. 104. К задаче 26.

$$m_{Z_2} = 0,2 \frac{\Omega}{\text{мм}}; \quad m_{Y_2} = \frac{1}{300} \frac{1}{\Omega \cdot \text{мм}}$$

Из чертежа $Oq_0 = 63,5 \text{ мм}$, тогда

$$m_{Z_1} = \frac{z_0}{Oq_0} = \frac{30,4}{63,5} \frac{\Omega}{\text{мм}} = 0,479 \frac{\Omega}{\text{мм}}$$

Определяем

$$z_{10} = \sqrt{(5+2)^2 + (4-30)^2} = 26,9 \Omega$$

и

$$y_{10} = \frac{1}{z_{10}} = \frac{1}{26,9 \Omega} = 0,0371 \frac{1}{\Omega}$$

откуда $(O_1B_0 = 18 \text{ мм})$,

$$m_{Y_1} = 0,00206 \frac{1}{\Omega \cdot \text{мм}}, \quad \text{а } m_I = 1,03 \frac{\text{А}}{\text{мм}}$$

$O_1B_0 = 18 \text{ мм}$ и из чертежа $O_1B_K = 50 \text{ мм}$.

В результате получаем $I_{10} = 18,5 \text{ А}$ и $I_{1K} = 51,5 \text{ А}$.

37. Представление простейших геометрических мест при помощи векторных уравнений

Построение круговых диаграмм для разного рода схем замещения может быть гораздо проще и скорее проведено, если связь между напряжениями и токами, с одной стороны, и постоянными цепи, с другой, выражать через векторные уравнения и на основании таких векторных уравнений находить соответствующие геометрические места.

Прежде чем применять этот метод, рассмотрим векторные уравнения простейших геометрических мест: прямой и окружности.

Если

$$A = a' + ja'' = ae^{ja} \quad (37,1)$$

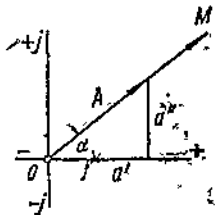
представляет собой некоторый постоянный вектор, занимающий на чертеже (фиг. 105) определенное положение, то уравнение

$$M = nA = na' + jna'' = nae^{ja} \quad (37,2)$$

(где n — множитель, меняющийся от $-\infty$ до $+\infty$) соответствует прямой линии, проходящей через начало координат. В зависимости от значения n вектор M будет иметь ту или другую длину, но направление его остается постоянным.

Уравнение

$$M = A + nB = ae^{ja} + nbe^{jb} \quad (37,3)$$

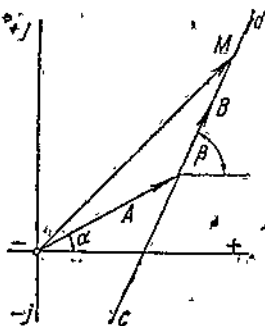


Фиг. 105. Изображение вектора переменной длины.

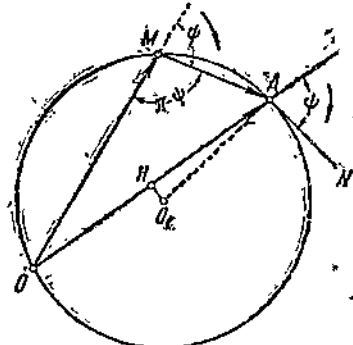
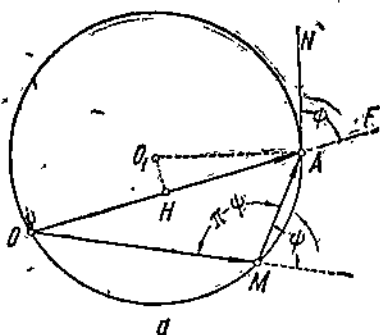
Уравнение

где A_0 — заданный постоянный вектор, φ — постоянный угол, а p — произвольный числовой множитель, соответствует векторам, проходящим через начало координат, концы которых лежат на некоторой окружности. Напишем последнее уравнение в следующем виде:

При всех значениях n сумма искомого вектора $M' = \overline{OM'}$ и другого вектора $Mne^{j\psi} = \overline{MA}$, по длине в n раз большего, чем M , и составляющего с ним неизменный угол ψ , должна всегда равняться заданному вектору $A = \overline{OA}$. Если угол ψ положителен, то вектор



Фиг. 106. Векторное уравнение прямой.



Фиг. 107 и 108. Построение окружности для случаев положительного и отрицательного углов.

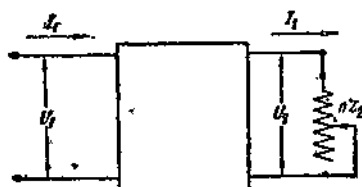
Так как угол у вершины треугольника OMA , образуемый сторонами OM и MA , имеет всегда одну и ту же величину $\pi - \varphi$, и он опирается на один и тот же отрезок OA , то конец искомого вектора при изменении n будет перемещаться по окружности, которая может быть построена по заданному вектору $\vec{A} = \vec{OA}$ и по углу φ . Для этого мы продолжаем вектор $\vec{OA}$ и у его конца A откладываем угол φ в сторону вращения стрелки часов, когда φ положительно, и против стрелки часов, когда φ имеет отрицательное значение. Сторона AN

угла φ совпадает с направлением касательной к искомой окружности. По хорде и касательной нетрудно построить окружность.

Когда $n = 0$, вектор $\overline{M}$ совпадает с вектором $\overline{OA}$, а $Mne^{j\varphi} = \overline{MA}$ будет равен нулю, т. е. точки M и A сольются и направление вектора $\overline{MA}$ будет совпадать с направлением касательной в точке A . По мере увеличения n конец вектора $\overline{M}$ будет перемещаться по дуге AMO . При $n = \infty$ точка M совпадает с точкой O , вектор $\overline{M} = \overline{OM}$ будет равен нулю, а вектор $Mne^{j\varphi} = \overline{OA}$ будет совпадать с заданным вектором $\overline{A} = \overline{OA}$.

38. Круговая диаграмма четырехполюсника при постоянном первичном напряжении и постоянном $\cos \varphi$.

В настоящем параграфе мы покажем, что для любого четырехполюсника при постоянном первичном напряжении $U_1 = \text{const}$ и при однородном изменении сопротивления во вторичной цепи ($\cos \varphi_2 = \text{const}$) концы вектора первичного тока перемещаются по окружности независимо от того, какова внутренняя схема четырехполюсника (фиг. 109).



Фиг. 109. Схема четырехполюсника.

При однородном изменении сопротивления во внешней цепи отношение между вторичным напряжением и током может быть представлено в виде

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = nZ_2 = nZ_2 e^{j\varphi_2},$$

где n — числовой множитель, меняющийся в пределах от 0 до ∞ ; очевидно, что $n = 0$ соответствует короткому замыканию, а $n = \infty$ холостому ходу, когда вторичная цепь разомкнута.

Если в уравнения, связывающие первичные и вторичные напряжения и токи, подставить вместо $\dot{U}_2 = nZ_2 \dot{I}_2$

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = (AnZ_2 + B)\dot{I}_2,$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 = (CnZ_2 + D)\dot{I}_2$$

и исключить $\dot{I}_2$, то мы получим зависимость первичного тока $\dot{I}_1$ от нагрузки nZ_2 :

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_1 (CnZ_2 + D)}{AnZ_2 + B} = \frac{\dot{U}_1 \left[\frac{C}{A} \cdot AnZ_2 + \frac{C}{A} B + D - \frac{C}{A} B \right]}{AnZ_2 + B} = \\ &= \frac{\dot{U}_1 \cdot C}{A} + \frac{\dot{U}_1 \cdot (AD - BC)}{A(AnZ_2 + B)} = \frac{\dot{U}_1 \cdot C}{A} + \frac{\dot{U}_1}{AB \left(1 + \frac{A}{B} nZ_2 \right)}; \end{aligned} \quad (38,1)$$

когда $n = \infty$, мы получим в первичной цепи ток холостого хода

$$\dot{I}_{10} = \frac{\dot{U}_1 C}{A} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{10}};$$

На тех же диаграммах мы можем отсчитать и вторичный ток $\dot{I}_2$. Из уравнений следует

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \end{aligned} \quad \left| \cdot C, \right. \\ \dot{I}_2 = \frac{A\dot{I}_1 - C\dot{U}_1}{AD - BC} = A\dot{I}_1 - C\dot{U}_1 = A\left(\dot{I}_1 - \frac{C}{A}\dot{U}_1\right) = A(\dot{I}_1 - \dot{I}_{10}).$$

Разность векторов $\dot{I}_1 - \dot{I}_{10}$ на чертеже представляется отрезком $\overline{I_{10}I_1}$

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_{10} = m_{I_1} \cdot \overline{OI_1} - m_{I_1} \cdot \overline{OI_{10}} = m_{I_1} \cdot \overline{I_{10}I_1},$$

поэтому длина отрезка $\overline{I_{10}I_1}$ может служить мерой значения вторичного тока (но не его фазы). Если числовое значение комплекса A будет равно a , то числовое значение вторичного тока I_2 может быть выражено через

$$I_2 = am_{I_1} \cdot I_{10}I_1 = m_{I_2} \cdot I_{10}I_1. \quad (38,3)$$

Вторичное напряжение U_2 измеряется отрезком I_1I_{1k} , так как из построения окружности следует, что

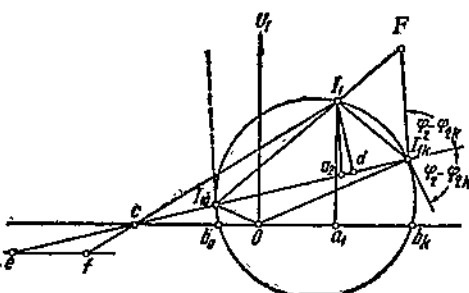
$$\overline{I_{10}I_1} = \frac{\overline{I_{10}I_{1k}}}{1 + \frac{nZ_2}{Z_{2k}}},$$

или

$$\overline{I_{10}I_{1k}} = \overline{I_{10}I_1} + \overline{I_1I_{1k}} = \overline{I_{10}I_1} + \overline{I_{10}I_1} \cdot \frac{nZ_2}{Z_{2k}},$$

откуда мы получаем, что

$$\overline{I_1I_{1k}} = \overline{I_{10}I_1} \cdot \frac{nZ_2}{Z_{2k}}.$$



Фиг. 111. Круговая диаграмма при постоянном первичном напряжении U_1 и постоянном коэффициенте мощности $\cos \varphi_2$ во вторичной цепи для случая, когда ток при холостом ходе опережает напряжение.

Если вместо векторов взять их числовые значения, то, учитывая уравнение (38,3), мы находим, что

$$I_1I_{1k} = I_{10}I_1 \cdot \frac{nZ_2}{Z_{2k}} = \frac{I_2 nZ_2}{am_{I_1} Z_{2k}} = \frac{U_2}{am_{I_1} Z_{2k}},$$

или

$$U_2 = am_{I_1} Z_{2k} \cdot I_1I_{1k} = m_{U_2} \cdot I_1I_{1k}, \quad (38,4)$$

где

$$m_{U_2} = am_{I_1} Z_{2k}, \quad (38,5)$$

это и требовалось доказать. Что касается масштаба, то его проще определить следующим образом: при холостом ходе $I_2 \doteq 0$ точка I_1 совпадает с точкой I_{10} . Согласно уравнению (31,1) вторичное напряжение при холостом ходе $I_2 = 0$ будет равно $\dot{U}_{20} = \frac{\dot{U}_1}{A}$, с другой стороны,

это напряжение будет измеряться отрезком $I_{10}I_{1k}$, поэтому $U_{20} = \frac{U_2}{a} = m_{U_2} \cdot I_{10}I_{1k}$; масштаб для вторичного напряжения определится через

$$m_{U_2} = \frac{U_2}{a \cdot I_{10}I_{1k}}, \quad (38,6)$$

где $I_{10}I_{1k}$ непосредственно измеряется по чертежу.

Круговая диаграмма позволяет находить также сопротивление вторичной цепи nz_2 , соответствующее первичному току $I_1 = m_{I_1} \cdot OI_1$.

Искомое сопротивление равняется $nz_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{m_{U_2} \cdot I_1 I_{1k}}{m_{I_2} \cdot I_{10}I_1}$.

Отношение двух переменных отрезков I_1I_{1k} и $I_{10}I_1$ можно заменить отношением переменного отрезка к постоянному, если в точке I_{1k} построить к линии $I_{10}I_{1k}$ угол $\varphi_2 - \varphi_{2k}$ (в другую сторону, чем это делалось при построении окружности), т. е. провести через точку I_{1k} линию, параллельную касательной к окружности в точке I_{10} , и продолжить линию $I_{10}I_1$ до пересечения с этой линией. Из подобия треугольников $I_{10}I_1I_{1k}$ и $I_{10}FI_{1k}$, имеющих общий угол $FI_{10}I_{1k}$ и равные углы:

$$\angle I_{10}I_1I_{1k} = \angle I_{10}I_{1k}F = \pi - (\varphi_2 - \varphi_{2k}),$$

следует, что

$$\frac{I_1I_{1k}}{I_{10}I_1} = \frac{I_{1k}F}{I_{10}I_{1k}}, \quad \text{или} \quad \frac{U_2 : m_{U_2}}{I_2 : m_{I_2}} = \frac{I_{1k}F}{I_{10}I_{1k}},$$

откуда мы получаем, что

$$\frac{U_2}{I_2} = nz_2 = \frac{m_{U_2}}{m_{I_2} \cdot I_{10}I_{1k}} \cdot I_{1k}F = m_Z \cdot I_{1k}F \quad (38,7)$$

— сопротивление внешней цепи — пропорционально отрезку $I_{1k}F$. Масштаб m_Z определится через

$$m_Z = \frac{m_{U_2}}{m_{I_2} \cdot I_{10}I_{1k}} = \frac{am_{I_1}z_{2k}}{am_{I_1}I_{10}I_{1k}} = \frac{z_{2k}}{I_{10}I_{1k}},$$

если мы выразим длину отрезка $I_{10}I_{1k}$ в единицах длины, а сопротивление z_{2k} , измеренное между вторичными клеммами при коротком замыкании первичных зажимов, выразим в омах. Если точка F не получается в пределах чертежа, то можно на $I_{10}I_{1k}$ на расстоянии, например, одной десятой этого отрезка от точки I_{10} провести линию, параллельную $I_{1k}F$, тогда на этой последней линии сопротивления будут отсекаются в масштабе, в десять раз меньшем (m_Z будет иметь в десять раз большее значение).

На круговой диаграмме могут быть отсчитаны и мощности. Первичная активная мощность, определяемая как произведение первичного напряжения и проекции первичного тока на вектор первичного напряжения,

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = U_1 m_{I_1} \cdot OI_1 \cdot \cos \varphi_1 = U_1 m_{I_1} \cdot I_1 a_1 = m_{P_1} \cdot I_1 a_1 \quad (38,8)$$

измеряется в масштабе $m_{P_1} = U_1 m_{I_1}$ длиной перпендикуляра $I_1 a_1$, опущенного из конца вектора первичного тока на горизонталь, проходящую через начальную точку O .

Для нахождения вторичной (активной мощности) проводим из той же точки I_1 линию I_1a_2 , параллельную FI_{1k} , до пересечения с линией $I_{10}I_{1k}$. Из подобия треугольников $I_{10}I_1I_{1k}$ и $I_{10}a_2I_1$ следует, что

$$\frac{I_{10}I_{1k}}{I_{10}I_1} = \frac{I_1I_{1k}}{I_1a_2}, \text{ или } I_{1k}I_1 \cdot I_{10}I_1 = I_{10}I_{1k} \cdot I_1a_2,$$

вторичная же мощность равна

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = m_{U_2} \cdot I_{1k} I_1 \cdot m_{I_2} \cdot I_{10} I_1 \cdot \cos \varphi_2 = \\ = \frac{U_1 \cdot I_{10} I_{1k}}{a \cdot I_{10} I_{1k}} \cdot a m_{I_1} \cos \varphi_2 \cdot I_1 a_2 = U_1 m_{I_1} \cos \varphi_2 \cdot I_1 a_2 = m_{P_2} \cdot I_1 a_2, \quad (38,9)$$

а потому она будет измеряться в масштабе $m_{P_2} = U_1 m_{I_1} \cos \varphi_2$ отрезком $I_1 a_2$.

При помощи этой же круговой диаграммы можно определить к. п. д. передачи энергии из первичного контура во вторичный

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_1 \cos \varphi_2 m_{I_1} \cdot I_1 a_2}{U_1 m_{I_1} \cdot I_1 a_1} = \frac{I_1 a_2 \cdot \cos \varphi_2}{I_1 a_1}.$$

Если мы сделаем следующее построение: продолжим линию $I_{1k}I_{10}$ до пересечения с горизонталью (точка c), затем соединим точки I_1 и c и пересечем продолжения линии $I_{1k}c$ и I_1c произвольной горизонтальной линией ef , а также опустим из точки I_1 перпендикуляр I_1d на линию $I_{1k}c$, то из чертежа следует

$$I_1a = cI_1 \cdot \sin \angle I_1ca_1;$$

$$I_1d = I_1a_2 \cdot \sin (\varphi_2 - \varphi_{2k}) = cI_1 \cdot \sin \angle I_1cd,$$

или

$$\eta = \frac{I_1a_2 \cdot \cos \varphi_2}{I_1a_1} = \frac{I_1d \cdot \cos \varphi_2}{I_1a_1 \cdot \sin (\varphi_2 - \varphi_{2k})} = \frac{\sin \angle I_1cd}{\sin \angle I_1ca_1} \cdot \frac{\cos \varphi_2}{\sin (\varphi_2 - \varphi_{2k})} = \\ = \frac{\sin \angle ecf}{\sin \angle cfe} \cdot \frac{\cos \varphi_2}{\sin (\varphi_2 - \varphi_{2k})} = \frac{ef \cos \varphi_2}{ec \cdot \sin (\varphi_2 - \varphi_{2k})} = m_\eta \cdot ef. \quad (38,10)$$

Поэтому если мы выберем отрезок ec равным

$$ec = \frac{100 \cos \varphi_2}{\sin (\varphi_2 - \varphi_{2k})} \text{ миллиметрам,}$$

то отрезок ef , выраженный в миллиметрах, дает в процентах к. п. д. всей схемы.

Задача 27. Построить круговую диаграмму по данным задачи 25, пользуясь методом векторных уравнений.

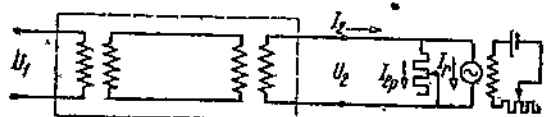
Решение (фиг. 112).

$$Z_{10} = Z_a + Z_c = 2 + j4 + 5 + j30 \Omega = 7 + j34 \Omega;$$

$$I_{10} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{10}} = \frac{500 \text{ В}}{7 + j34 \Omega} = 2,93 - j14,2 \text{ А};$$

$$Z_{2k} = Z_{1k} = Z_a + \frac{Z_b Z_c}{Z_b + Z_c} = 2 + j4 + \frac{(2 + j4)(5 + j30)}{2 + j4 + 5 + j30} \Omega = \\ = 3,62 + j7,57 \Omega = 8,4 \angle 64^\circ 30' \Omega;$$

синхронных компенсаторов, представляющих собой работающие вхолостую (без нагрузки) синхронные двигатели с широким регулированием возбуждения (фиг. 113). Перевозбужденный синхронный компенсатор



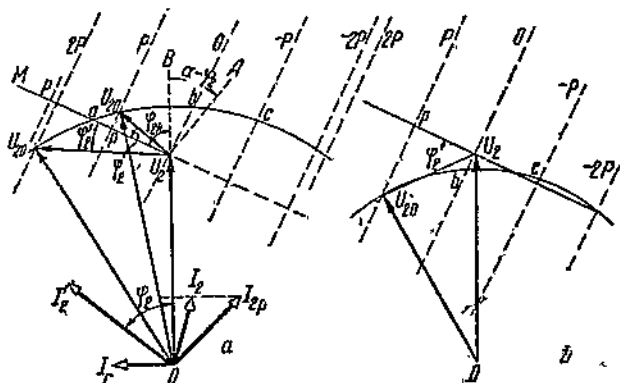
Фиг. 113.

дает емкостную, а недовозбужденный индуктивную реактивную нагрузку. Регулируя возбуждение и изменяя характер и величину реактивного тока, включаемого параллельно к потребителю, можно регулировать вторичное напряжение, поддерживая его постоянным и давая ему в известных пределах значения большие и меньшие чем при холостом ходе.

Суммарный ток, подаваемый во вторичную сеть, может быть выражен через [см. уравнение (31,1) и (32,7)]

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1 - A\dot{U}_2}{B} = \frac{A}{B} \left(\frac{\dot{U}_1}{A} - \dot{U}_2 \right) = \frac{\dot{U}_{20} - \dot{U}_2}{Z_{2h}},$$

где $\frac{\dot{U}_1}{A} = \dot{U}_{20}$ — напряжение у вторичных зажимов четырехполюсника при отсутствии какой бы то ни было нагрузки.



Фиг. 114. Круговая диаграмма четырехполюсника, когда $U_1 = \text{const}$ и $U_2 = \text{const}$.

Фаза вторичного напряжения и вторичного тока определяется помимо характера и величины нагрузки фазой первичного напряжения $\dot{U}_1 = A\dot{U}_{20}$ (или $\dot{U}_{20} = \frac{\dot{U}_1}{A}$), однако, чтобы удобнее было вычерчивать диаграмму, примем за исходный вектор вторичного напряжения, имеющий постоянную числовую величину $\dot{U}_2 = m_I \cdot O\dot{U}_2$. Тогда суммарный вторичный ток на векторной диаграмме

$$\dot{I}_2 = \frac{m_I}{z_{2h}} (\overline{OU}_{20} - \overline{OU}_2) e^{-i\varphi_{2h}} = m_I \cdot \overline{U}_2 \overline{U}_{20} \cdot e^{-i\varphi_{2h}}$$

будет в масштабе $m_I = \frac{m_U}{z_{2h}}$ определяться отрезком $\overline{U}_2 \overline{U}_{20}$ (фиг. 114,а).

При постоянстве первичного и вторичного напряжений $U_1 = a \cdot U_{20} = \text{const}$ (где a числовое значение множителя A) и $U_2 = \text{const}$, конец вектора $\overline{U_2 U_{20}}$, а именно точка U_{20} будет при разных режимах нагрузки лежать на окружности, описанной из точки O радиусом $OU_{20} = \frac{U_1}{am_U}$.

Вектор $\overline{U_2 U_{20}}$, равный

$$m_U \overline{U_2 U_{20}} = r_{2h} \dot{I}_2 + jx_{2h} \dot{I}_2 = z_{2h} e^{j\varphi_{2h}} \dot{I}_2,$$

составляет с направлением тока угол φ_{2h} . Поэтому если мы к вектору $\dot{U}_2 = m_U \overline{OU_2}$ проведем под углом φ_{2h} линию $U_2 M$, то угол $\angle MU_2 U_{20}$ будет на чертеже определять угол сдвига φ_2 между напряжением $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. Это следует из того, что если $\overline{U_2 A} \parallel \overline{OI_2}$ есть направление вектора тока, составляющий с $\dot{U}_2 = m_U \overline{OU_2}$ угол φ_2 , то направление $U_2 U_{20}$ будет составлять с OU_2 угол $\angle BU_2 U_{20} = \varphi_{2h} - \varphi_2$, а потому угол $\angle U_{20} U_2 A = \varphi_{2h} - \angle BU_2 U_{20} = \varphi_2$.

Проекция отрезка $U_2 U_{20}$ на линию $U_2 M$ по величине равна активной составляющей суммарного вторичного тока $I_2 \cos \varphi_2 = m_I U_2 p$, а длина перпендикуляра, опущенного из точки U_{20} на линию $U_2 M$, реактивной составляющей суммарного вторичного тока $I_2 \sin \varphi_2 = m_I \cdot U_{20} p$.

Если значения этих отрезков помножить на вторичное напряжение U_2 , то те же отрезки в масштабе $m_p = U_2 m_I$ позволят нам непосредственно отмерить активную и реактивную мощности всей вторичной цепи.

$$P_a = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = m_p \cdot U_2 p \text{ и } P_r = U_2 I_2 \sin \varphi_2 = m_p \cdot U_{20} p.$$

Таким образом, для того чтобы при заданной мощности $P_a = m_p U_2 p$ и при постоянном первичном напряжении $\overline{U_{20}} = m_U \overline{OU_{20}}$ вторичное напряжение имело неизменное значение, равно $U_2 = m_U \overline{OU_2}$, необходимо, чтобы сдвиг между вторичным напряжением и суммарным вторичным током равнялся бы определенному углу φ_2 . Из диаграммы мы видим, что при малых мощностях, забираемых от вторичных зажимов (точка p будет находиться ближе к точке U_2), нагрузка должна иметь резко индуктивный характер $\varphi_2 > 0$, при больших нагрузках (точка p'), напротив, ток должен опережать напряжение (угол φ_2). С увеличением нагрузки вектор первичного напряжения все больше должен опережать вторичное напряжение. При отдаче энергии во вторичную сеть конец вектора U_{20} будет перемещаться от точки b влево. Когда точка U_{20} совпадет с точкой b , $\varphi_2 = 90^\circ$, активная мощность равна нулю, для поддержания напряжения необходимо нагрузить вторичные зажимы чисто индуктивной нагрузкой. Часть круговой диаграммы направо от точки b будет соответствовать режиму работы, когда на стороне вторичных зажимов не будет забираться энергия, а наоборот, на стороне вторичных зажимов будет присоединен источник энергии — генератор. Это может иметь место, когда вектор OU_2 будет опережать вектор OU_{20} . На другой диаграмме фиг. 114, b повторено то же самое построение, когда вторичное напряжение при нагрузке больше чем при отсутствии какой бы то ни было нагрузки $U_2 > U_{20}$. Повышение напряжения при

нагрузке достигается наличием весьма большого опережающего тока. В этом случае суммарный вторичный ток должен содержать еще большую опережающую реактивную слагающую.

Для того чтобы суммарный вторичный ток имел к данной активной слагающей еще определенную реактивную слагающую, как указывалось выше, параллельно к потребителю присоединяется так называемый синхронный компенсатор, который дает необходимую величину реактивного тока. Так, например, если $m_I \cdot OI_2' = I_2$, ток, забираемый потребителем, то, для того чтобы при том же значении активной слагающей (при той же мощности) ток имел бы сдвиг фаз φ_2 и равнялся бы $I_2 = m_I OI_2$, необходимо, чтобы от вторичных зажимов брались еще добавочный реактивный ток $I_r = m_I \cdot OI_r = m_I \cdot \overline{I_2 I_r}$, который и берется синхронным компенсатором.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

40. Многофазные токи

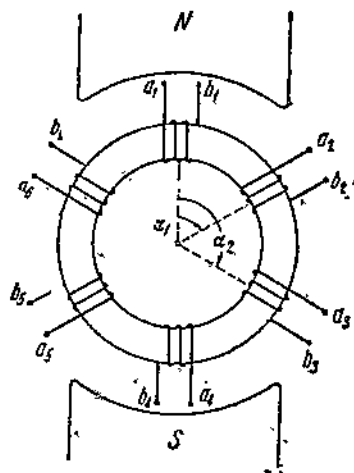
Под многофазной системой или системой многофазных токов понимают систему нескольких цепей переменного тока, в которых действуют э. д. с. одной и той же частоты, но сдвинутые в своих фазах. Хотя в многофазных системах э. д. с. и токи могут изменяться по любому закону, однако мы в дальнейшем будем рассматривать лишь такие системы, в которых напряжения и токи изменяются синусоидально.

Части цепей, по которым текут токи одной и той же фазы, называются также фазами, соответствующие токи — фазовыми токами, а действующие в фазах э. д. с. и напряжения — фазовыми э. д. с. и напряжениями.

Таким образом слову „фаза“ приписывают кроме понятия состояния колебания также и название части цепи в многофазной системе.

Многофазная система может быть получена следующим образом: на якоре генератора, вращающегося в магнитном поле, помещаются столько обмоток или катушек, сдвинутых по окружности якоря друг относительно друга, сколько фаз имеется в системе (фиг. 115); э. д. с., наводимые в этих обмотках, будут одной и той же частоты, но сдвинуты по фазе:

$$e_1 = E_{1m} \sin \omega t; \quad e_2 = E_{2m} \sin (\omega t - \alpha_1); \quad e_3 = E_{3m} \sin (\omega t - \alpha_2).$$



Фиг. 115. Шестифазный генератор.

Многофазные системы могут быть подразделены на:

- 1) симметричные и несимметричные системы;
- 2) несвязанные (раздельные) и соединенные (сцепленные) системы; в сцепленных системах отдельные фазы могут быть соединены или в звезду или в многоугольник, однако мы можем иметь и смешанное соединение звездой и многоугольником;
- 3) уравновешенные и неуравновешенные системы.

41. Симметричные и несимметричные системы

Многофазная система является симметричной в том случае, когда во всех фазах действуют э. д. с. одной и той же амплитуды и когда э. д. с. в двух смежных фазах сдвинуты на один и тот же угол $\alpha = \frac{2\pi}{m}$, где m — число фаз. В такой системе мгновенные значения э. д. с. в отдельных фазах выражаются через:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= E_m \sin \omega t; & \dot{E}_1 &= \dot{E}; \\ e_2 &= E_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{m} \right); & \dot{E}_2 &= \dot{E} e^{-j \frac{2\pi}{m}}; \\ e_3 &= E_m \sin \left(\omega t - 2 \frac{2\pi}{m} \right); & \dot{E}_3 &= \dot{E} e^{-j 2 \frac{2\pi}{m}}; \\ &\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \\ e_m &= E_m \sin \left[\omega t - (m-1) \frac{2\pi}{m} \right]; & \dot{E}_m &= \dot{E} e^{-j (m-1) \frac{2\pi}{m}}. \end{aligned} \right\} \quad (41,1)$$

Эти э. д. с. могут быть представлены или при помощи синусоид (фиг. 116), сдвинутых по фазе на угол $\frac{2\pi}{m}$ и дающих мгновенные значения, или при помощи векторов, повернутых друг относительно друга на один и тот же угол $\frac{2\pi}{m}$.

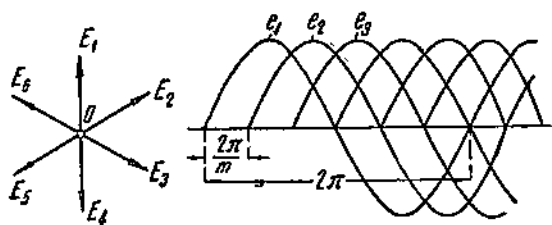
Векторы на диаграмме располагаются симметрично вокруг центра, и если мы будем эти векторы складывать геометрически, то получим правильный замыкающийся многоугольник, т. е. в симметричной системе сумма векторов, а следовательно, и сумма мгновенных значений э. д. с., равна нулю:

$$e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_m = 0,$$

или

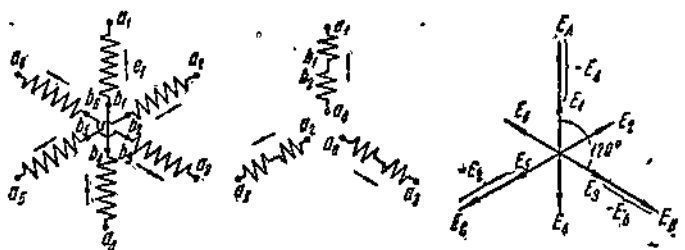
$$\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 + \dots + \dot{E}_m = 0. \quad (41,2)$$

Если число фаз системы четное, то, соединяя каждую пару противоположных фаз последовательно, но в противоположном направлении



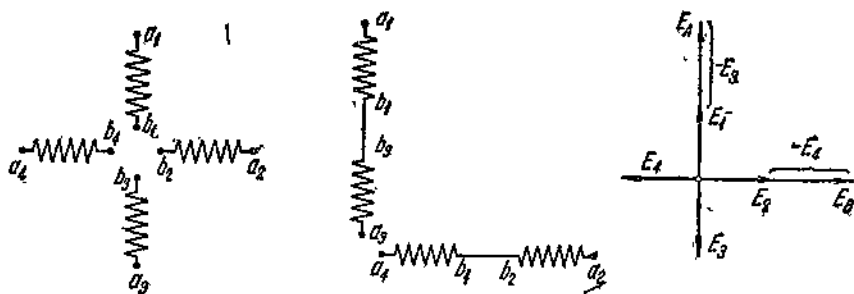
Фиг. 116. Мгновенные значения и векторная диаграмма шестифазной системы.

(в контрсоединение), можно число фаз сократить вдвое. На фиг. 117 изображена схематически шестифазная система в виде шести симметрично расположенных зигзагообразных линий, обращенных одними концами к центру, а другими — от центра. Если соединить противополож-



Фиг. 117. Преобразование шестифазной системы в трехфазную.

ные фазы, например, первую и четвертую своими концами (не зажим a_1 с зажимом b_4 , а зажим b_1 с зажимом b_4 и соответственно b_2 с b_5 и b_3 с b_6), то шестифазную систему можно преобразовать в трехфазную, в которой каждая фаза состоит из двух взаимно противоположных фаз



Фиг. 118. Четырехфазная и двухфазная системы.

шестифазной системы. В каждой фазе этой преобразованной системы будет действовать э. д. с., равная разности э. д. с. обеих составных частей:

$$\begin{aligned} e_1 - e_4 &= E_m \sin \omega t - E_m \sin (\omega t - \pi) = 2E_m \sin \omega t = 2e_1; \\ E_1 - E_4 &= E_1 - (-E_1) = 2E_1, \end{aligned} \quad (41,3)$$

так как последние в любой момент равны и противоположны, то э. д. с. в преобразованной системе будут иметь удвоенные значения и будут сдвинуты по фазе на $\frac{2\pi}{3}$, или 120° .

Если последовательно (в контрсоединение) соединить противоположные фазы в симметричной четырехфазной системе (фиг. 118), то мы получим двухфазную систему со сдвигом 90° :

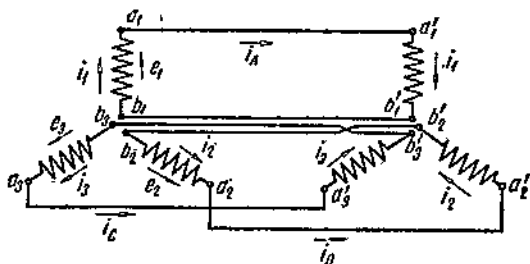
$$e_A = E_m \sin \omega t$$

$$e_B = E_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Двухфазная система является системой несимметричной: сумма фазовых э. д. с. не равна нулю. Двухфазная система довольно часто применялась в первый период развития техники переменных токов (в США и во Франции): В настоящее же время в технике сильных токов применяется почти исключительно трехфазная система.

42. Соединение звездой

В многофазной системе каждая фаза может быть соединена со своей отдельной цепью и в то же время не иметь электрического соединения с другими фазами. Такая система представляет собой m изолированных друг от друга цепей однофазного тока одной и той же частоты, в которых э. д. с. сдвинуты друг относительно друга. В симметричных системах угол сдвига равен $\frac{2\pi}{m}$. Такая несвязанная трех-



Фиг. 119. Несвязанная трехфазная система.

фазная система представлена на фиг. 119. При одинаковой нагрузке всех фаз э. д. с. или напряжения и токи в каждой фазе определяются как

$$\begin{aligned} u_1 &= U_m \sin \omega t; & i_1 &= I_m \sin (\omega t - \varphi); \\ u_2 &= U_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{m} \right); & i_2 &= I_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{m} - \varphi \right); \\ u_3 &= U_m \sin \left(\omega t - 2 \frac{2\pi}{m} \right); & i_3 &= I_m \sin \left(\omega t - 2 \frac{2\pi}{m} - \varphi \right); \\ &\dots & & \\ u_m &= U_m \sin \left[\omega t - (m-1) \frac{2\pi}{m} \right]; & i_m &= I_m \sin \left[\omega t - (m-1) \frac{2\pi}{m} - \varphi \right], \end{aligned}$$

или в векторной форме

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}; & \dot{I}_1 &= \dot{I} e^{-j\varphi}; \\ \dot{U}_2 &= \dot{U} e^{-j \frac{2\pi}{m}}; & \dot{I}_2 &= \dot{I} e^{-j \frac{2\pi}{m} - j\varphi}; \\ \dot{U}_3 &= \dot{U} e^{-j 2 \frac{2\pi}{m}}; & \dot{I}_3 &= \dot{I} e^{-j 2 \frac{2\pi}{m} - j\varphi}; \\ &\dots & & \\ \dot{U}_m &= \dot{U} e^{-j (m-1) \frac{2\pi}{m}}; & \dot{I}_m &= \dot{I} e^{-j (m-1) \frac{2\pi}{m} - j\varphi}. \end{aligned} \quad (42,1)$$

$$\dot{U}_m = \dot{U} e^{-j (m-1) \frac{2\pi}{m}}; \quad \dot{I}_m = \dot{I} e^{-j (m-1) \frac{2\pi}{m} - j\varphi} \quad (42,2)$$

В такой системе для соединения каждой фазы источника энергии со своим приемником необходимы два провода (прямой и обратный), всего $2m$ проводов. Цепи отдельных фаз можно электрически связать между

собой, соединив все обратные провода вместе в один провод (фиг. 120, а), сократив при этом число проводов с $2m$ до $m+1$ (в трехфазной системе с 6 до 4).

Такое соединение, в котором все фазы своими концами соединяются в одну общую, так называемую нейтральную или нулевую точку, называется соединением звездой.

В объединенном проводе, называемом нулевым или нейтральным, мгновенное значение тока при одинаковой нагрузке всех фаз будет всегда равно нулю, что следует из векторной диаграммы, в которой векторы тока, как и векторы э. д. с., представляются равными отрезками, составляющими между собой равные углы:

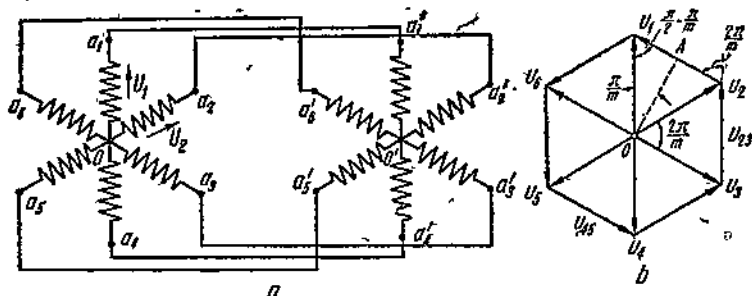
$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_m = 0, \text{ или}$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_m = 0. (42,3)$$

Фиг. 120. Трехфазная система, соединенная в звезду с нулевым и без нулевого провода.

Так как ток в нейтральном проводе равен нулю и концы провода имеют при равномерной нагрузке всегда один и тот же потенциал (который может отличаться от потенциала земли), то можно обойтись и без этого нейтрального провода (сократив, таким образом, число проводов с $2m$ до m) (фиг. 120, б и 121, а).

Так как ток в нейтральном проводе равен нулю и концы провода имеют при



Фиг. 121. Шестифазная система, соединенная в звезду.

В системах, соединенных звездой, в фазах и в соответствующих проводах линии протекают одни и те же токи:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_A; i_2 = i_B; i_3 = i_C, \\ \text{или} \\ i_1 &= I_A; i_2 = I_B; i_3 = I_C. \end{aligned} \right\} (42,4)$$

Так называемое линейное или междуфазовое напряжение (U_a), т. е. разность потенциалов между началами каких-нибудь двух фаз, например, a_1 и a_2 , в каждый момент (при открытой внешней цепи) равно алгебраической разности мгновенных э. д. с., действующих в этих фазах, так как на пути $a_2 O a_1$ эти э. д. с. направлены в разные стороны. Превышение потенциала точки a_1 над потенциалом в точке O равно u_1 , а превышение потенциала точки O над потенциалом в точке a_2 составляет $-u_2$, поэтому мгновенное значение напряжения или разности потенциалов между точками a_1 и a_2 , т. е. превышение потенциала точки a_1 над потенциалом точки a_2 , равно

$$u_{12} = u_1 - u_2 = U_m \sin \omega t - U_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{m} \right) = \\ = U_m 2 \sin \frac{\pi}{m} \cdot \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{m} \right),$$

или в векторной форме

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = \dot{U}_1 - \dot{U}_1 e^{-j \frac{2\pi}{m}} = \dot{U}_1 2 \sin \frac{\pi}{m} e^{j \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m} \right)}. \quad (42,5)$$

Последнее соотношение получается, если мы вычитание одного вектора из другого осуществим геометрическим путем (фиг. 121):

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = m_U \cdot (\overrightarrow{OU_1} - \overrightarrow{OU_2}) = m_U \cdot \overrightarrow{U_2 U_1}.$$

Из чертежа следует, что

$$U_2 U_1 = 2 AU_1 = 2 OU_1 \cdot \sin \frac{\pi}{m},$$

или

$$U_{12} = U_a = U_1 \cdot 2 \sin \frac{\pi}{m}, \quad (42,6)$$

и что направление линии $U_2 U_1$ составляет с направлением линии OU_1 угол $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}$.

Напряжения между каждыми двумя другими смежными фазами, а также и между двумя любыми фазами могут быть получены по величине и фазе таким же образом. Если мы соединим концы векторов фазовых напряжений, или э. д. с., проведенных из одной точки, прямыми линиями, то эти отрезки можно рассматривать как векторы и считать их направленными от конца последующего вектора к началу предыдущего (фиг. 122). Например, вектор разности

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_2 = \dot{U}_{12} = m_U \cdot \overrightarrow{U_2 U_1}$$

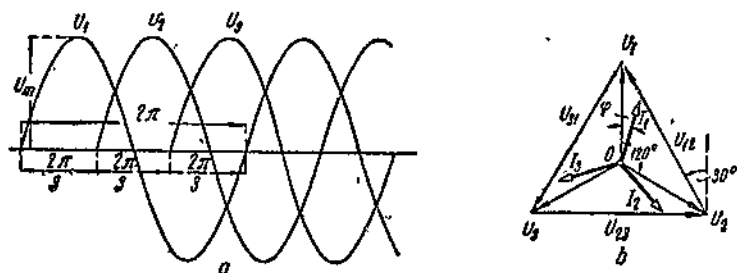
направлен от точки U_2 к точке U_1 , и наоборот, вектор разности

$$\dot{U}_{21} = \dot{U}_2 - \dot{U}_1 = m_U \cdot \overrightarrow{U_1 U_2}$$

направлен от точки U_1 к точке U_2 .

Установим следующий порядок определения положительных направлений напряжений и токов в схемах многофазных систем, соединенных в звезду. В генераторах для э. д. с. и токов за положительное будем считать во всех фазах направление от нулевой точки к внешним зажи-

мам, а в приемнике энергии для токов — от внешних зажимов к нулевой точке, а для напряжений, наоборот, — от нулевой точки к внешним зажимам. Это обуславливается тем, что ток в приемнике энергии течет от более высокого потенциала к более низкому, и поэтому при положительном направлении тока зажимы $a_1, a_2, \dots$ будут иметь более высокий потенциал, чем нулевая точка. На диаграммах мы и для приемников энергии будем откладывать векторы напряжений и векторы токов в одном направлении.



Фиг. 122. Кривые мгновенных значений напряжений и векторная диаграмма напряжений и токов в трехфазной системе, соединенной звездой.

Рассмотрим теперь наиболее часто встречающуюся из многофазных систем трехфазную систему, соединенную звездой (фиг. 120 и 122). Фазовые напряжения и токи в такой системе при одинаковой нагрузке сдвинуты друг относительно друга на $\frac{2\pi}{3}$, или на 120° .

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= U_m \sin \omega t; & i_1 &= I_m \sin (\omega t - \varphi); \\ u_2 &= U_m \sin (\omega t - 120^\circ); & i_2 &= I_m \sin (\omega t - 120^\circ - \varphi); \\ u_3 &= U_m \sin (\omega t - 240^\circ); & i_3 &= I_m \sin (\omega t - 240^\circ - \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (42,7)$$

где $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

Угол $\omega t = 2\pi ft$ измеряется в дуговых единицах, и в соответствии с этим вместо 120° и 240° следовало бы писать $\frac{2\pi}{3}$ и $2 \frac{2\pi}{3}$, но для наглядности удобно иногда сдвиг фаз выражать в градусах.

В векторной форме те же величины выражаются через

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= U_1; & \dot{I}_1 &= I_1 e^{-j\varphi}; \\ \dot{U}_2 &= U_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}; & \dot{I}_2 &= I_1 e^{-j\frac{2\pi}{3} - j\varphi}; \\ \dot{U}_3 &= U_1 e^{-j2\frac{2\pi}{3}}; & \dot{I}_3 &= I_1 e^{-j2\frac{2\pi}{3} - j\varphi}; \end{aligned} \right\} \quad (42,8)$$

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0.$$

Мгновенные значения междуфазовых напряжений в трехфазной системе, соединенной звездой, определяются через

$$\begin{aligned} u_{12} &= u_1 - u_2 = U_m \sin \omega t - U_m \sin (\omega t - 120^\circ) = \\ &= U_m \cdot 2 \sin 60^\circ \cdot \sin (\omega t + 30^\circ) = \sqrt{3} U_m \sin (\omega t + 30^\circ); \end{aligned}$$

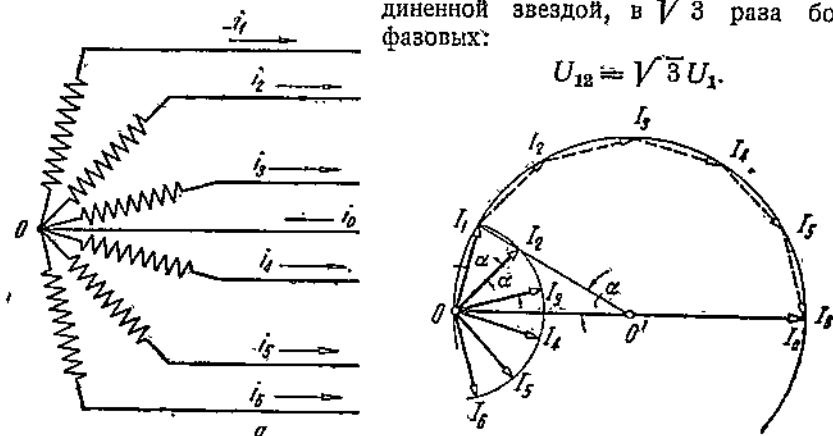
$$\left. \begin{aligned} u_{23} &= u_2 - u_3 = \sqrt{3} U_m \sin(\omega t + 270^\circ); \\ u_{31} &= u_3 - u_1 = \sqrt{3} U_m \sin(\omega t + 150^\circ). \end{aligned} \right\} \quad (42,9)$$

В векторной форме те же междуфазовые напряжения изображаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{12} &= \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = m_U \cdot \overline{OU}_1 - m_U \cdot \overline{OU}_2 = m_U \cdot \overline{U_3 U_1} = \\ &= m_U \cdot \sqrt{3} \overline{OU}_1 e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} \dot{U}_1 e^{j\frac{\pi}{6}}; \\ \dot{U}_{23} &= \dot{U}_2 - \dot{U}_3 = m_U \cdot \overline{U_3 U_2} = m_U \cdot \sqrt{3} \overline{OU}_1 e^{-j\frac{\pi}{2}} = \\ &= \sqrt{3} \dot{U}_1 e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \sqrt{3} \dot{U}_1; \\ \dot{U}_{31} &= \dot{U}_3 - \dot{U}_1 = m_U \cdot \overline{U_1 U_3} = m_U \cdot \sqrt{3} \overline{OU}_1 e^{j\frac{5\pi}{6}} = \\ &= \sqrt{3} \dot{U}_1 e^{j\frac{5\pi}{6}}. \end{aligned} \right\} \quad (42,10)$$

Междуфазовые или линейные напряжения в трехфазной системе, соединенной звездой, в $\sqrt{3}$ раза больше фазовых:

$$U_{12} = \sqrt{3} U_1.$$



Фиг. 123. Несимметричная шестифазная система.

Иногда междуфазовые (или линейные) напряжения обозначают $U_{\text{лиф}}$ или $U_{\text{л}}$, фазовые — $U_{\text{ф}}$:

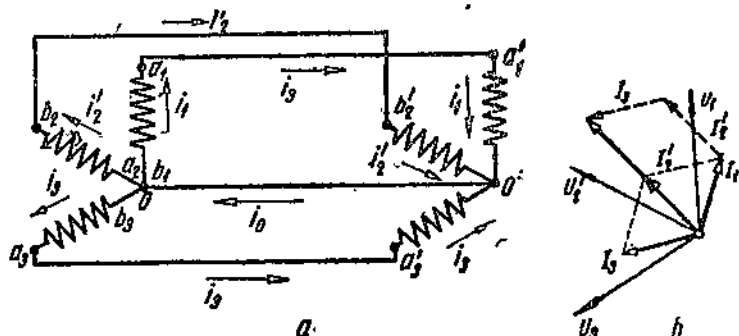
$$U_{\text{лиф}} = U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\text{ф}}. \quad (42,11)$$

В несимметричных системах, соединенных звездой, например, в m -фазной системе, где напряжения в отдельных фазах сдвинуты друг относительно друга не на угол $\frac{2\pi}{m}$, а на угол $\alpha = \frac{\pi}{m}$ (фиг. 123), ток в нейтральном проводе даже при одинаковой нагрузке не равен нулю. Ток в нейтральном проводе по величине и направлению определяется замыкающей линией $\overline{OI_0}$ многоугольника, построенного на векторах то-

жов в отдельных фазах. Если все фазы одинаково нагружены, то при геометрическом сложении векторов тока вектор тока в нулевом проводе получается в виде отрезка, равного замыкающей стороне половины правильного многоугольника:

$$I_0 = m_I \cdot OI_0 = m_I \cdot \frac{OI_1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{I_1}{\sin \frac{\pi}{2m}}. \quad (42,12)$$

В несимметричную систему может превратиться, например, симметричная трехфазная система, если одна какая-нибудь фаза присоединена неправильно, например если вторая фаза (фиг. 124) присоединена в обратную сторону, т. е. если с нулевой точкой соединяется не конец фазы b_2 , а начало ее a_2 . В этом случае, как это следует из чертежа,



Фиг. 124. Трехфазная система при неправильном соединении одной фазы.

ток в нулевом проводе будет равен не нулю, а двойному фазовому току; междуфазовое напряжение между a_3 и a_1 будет равно $\sqrt{3} U_1$, а между a_1 и b_2 и между b_2 и a_3 оно будет равно U_1 .

К несимметричным системам принадлежит и двухфазная система (фиг. 125). Напряжения и токи в этой системе определяются как

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= U_m \sin \omega t; & i_1 &= I_m \sin (\omega t - \varphi); \\ u_3 &= U_m \sin (\omega t - 90^\circ); & i_2 &= I_m \sin (\omega t - 90^\circ - \varphi); \end{aligned} \right\} \quad (42,13)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= U; & \dot{I}_1 &= I e^{-j\varphi}; \\ \dot{U}_3 &= U e^{-j\frac{\pi}{2}}; & \dot{I}_2 &= I e^{-j\frac{\pi}{2} - j\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (42,14)$$

Если оба обратных провода соединить вместе, то ток в общем нулевом проводе составит

$$\begin{aligned} i_0 &= i_1 + i_2 = I_m \sin (\omega t - \varphi) + I_m \sin (\omega t - 90^\circ - \varphi) = \\ &= I_m \cdot 2 \sin (\omega t - 45^\circ - \varphi) \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2} I_m \sin (\omega t - 45^\circ - \varphi), \end{aligned}$$

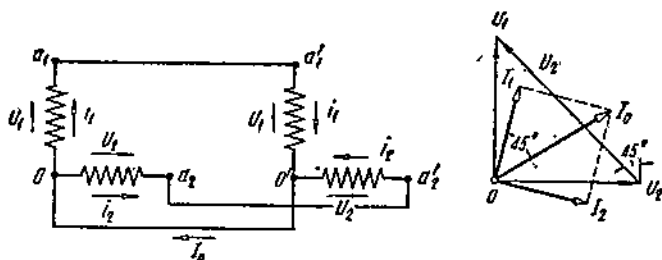
или

$$i_0 = i_1 + i_2 = m_I \cdot \overline{OI_1} + m_I \cdot \overline{OI_2} = m_I \cdot \overline{OI_0} = \sqrt{2} I_1 e^{-j\frac{\pi}{4} - j\varphi},$$

т. е. по величине равен току в одной из фаз, умноженному на $\sqrt{2}$:

$$I_0 = \sqrt{2} I \quad (42,15)$$

и отстает от тока в первой фазе на угол в 45° . Междупазовое, или линейное, напряжение, т. е. напряжение между зажимами a_1 и a_2 , равно



Фиг. 125. Двухфазная система.

$u_{12} = u_1 - u_2 = U_m \sin \omega t - U_m \sin (\omega t - 90^\circ) = \sqrt{2} U_m \sin (\omega t + 45^\circ)$,
или

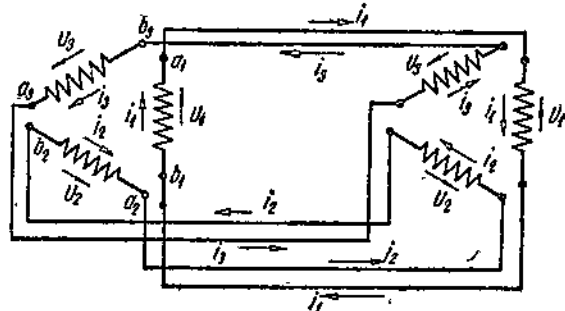
$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = m_U \cdot \overline{OU}_1 - m_U \cdot \overline{OU}_2 = m_U \cdot \overline{U}_2 \overline{U}_1 = \sqrt{2} \dot{U}_1 e^{j \frac{\pi}{4}}$$

равно фазовому напряжению, умноженному на $\sqrt{2}$, и опережает напряжение первой фазы на 45° .

43. Соединение многоугольником

В соединении многоугольником все отдельные фазы многофазной системы соединяются последовательно таким образом, что как в генераторе, так и в приемнике энергии начало одной фазы соединяется с концом следующей фазы.

При этом прямые и обратные провода двух смежных фаз окажутся соединенными параллельно, и они могут быть заменены одним проводом, так что число проводов, соединяющих генератор с приемником энергии, сокращается вдвое и становится равным числу фаз (фиг. 126, 127 и 129). Соединение многоугольником в генераторах возможно лишь тогда, когда сумма э. д. с. или напряжений во всех фазах равна нулю, что мы имеем в симметричной системе, в которой геометрическая сумма векторов напряжений всех фаз составляет замкнутый многоугольник (фиг. 128 и 130), в противном случае может получиться короткое замыкание.

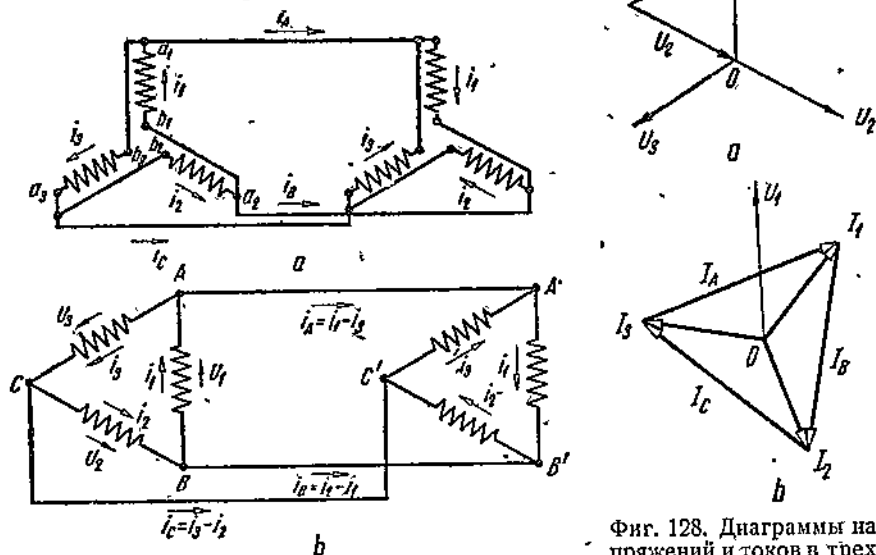


Фиг. 126. Несвязанная трехфазная система.

В системе, соединенной многоугольником, напряжение между смежными зажимами или проводами, соединяющими генератор с приемником энергии, равняется по величине и направлению напряжению на концах соответствующих фаз (фиг. 127 и 129).

$$U_{AB} = U_a = U_1 = U_\phi. \quad (43,1)$$

Если и генератор и приемник энергии в симметричной системе соединены оба в многоугольник, то токи в одноименных фазах генератора и приемника энергии также равны между собой и совпадают по фазе. Это вытекает из того, что если мы каждый провод заменим двумя прово-



Фиг. 127. Трехфазная система, соединенная треугольником.

Фиг. 128. Диаграммы напряжений и токов в трехфазной системе, соединенной треугольником.

дами и расцепим соединения в вершинах многоугольника, то мы получим неразветвленные цепи с одним и тем же током в соответствующих элементах системы.

Токи же в проводах линии не равны токам в фазах и сдвинуты относительно них. Ток в линии равен разности токов в двух смежных фазах. Токи в проводах мы будем всегда считать направленными от генератора к приемнику энергии (фиг. 129) и определять ток в каком-нибудь проводе как разность токов в двух соприкасающихся фазах и притом как разность тока в последующей фазе и тока в предыдущей фазе. Если нам дана m -фазная система, соединенная в многоугольник, то токи в двух смежных фазах сдвинуты на угол $\frac{2\pi}{m}$:

$$\begin{aligned} i_A &= i_1 - i_m = I_m \sin(\omega t - \varphi) - I_m \sin\left[\omega t - (m-1) \frac{2\pi}{m} - \varphi\right] = \\ &= I_m \cdot 2 \sin \frac{\pi}{m} \cdot \sin\left[\omega t - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right) - \varphi\right]. \end{aligned}$$

а токи в линейных проводах соответственно равны:

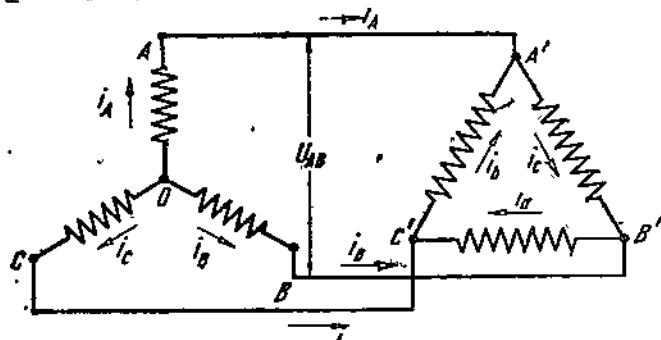
$$\begin{aligned} i_A &= i_1 - i_3 = I_m \sin(\omega t - \varphi) - I_m \sin(\omega t - 240^\circ - \varphi) = \\ &= \sqrt{3} I_m \sin(\omega t - 30^\circ - \varphi); \\ i_B &= \sqrt{3} I_m \sin(\omega t - 150^\circ - \varphi); \\ i_C &= \sqrt{3} I_m \sin(\omega t - 270^\circ - \varphi), \end{aligned}$$

или в векторной форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_1 - \dot{I}_3 = m_1 \cdot \overline{OI_1} - m_1 \cdot \overline{OI_3} = \\ &= m_1 \cdot \overline{I_3 I_1} = \sqrt{3} \dot{I}_1 e^{-j \frac{\pi}{6}}; \\ \dot{I}_B &= \sqrt{3} \dot{I}_1 e^{-j \frac{5\pi}{6}}; \\ \dot{I}_C &= \sqrt{3} \dot{I}_1 e^{j \frac{\pi}{2}} = j \sqrt{3} \dot{I}_1; \\ \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C &= 0. \end{aligned} \right\} (43,4)$$

44. Смешанные соединения и преобразование симметричного многоугольника в симметричную звезду, и наоборот

Соединение многоугольником может быть скомбинировано с соединением звездой, например, генератор может быть соединен звездой, а приемник энергии — многоугольником, и наоборот. Такое смешанное соединение для трехфазной системы представлено на фиг. 131. В этом



Фиг. 131. Соединение генератора звездой и нагрузки треугольником.

случае линейные токи совпадают с фазовыми токами той части системы, которая соединена звездой, а междуфазовое напряжение звезды равно фазовому напряжению треугольника.

При одинаковой нагрузке всех фаз в схемах со смешанным соединением нахождение токов в фазах и линиях, а также падений напряжения и напряжений у зажимов приемника энергии проще всего достигается приведением (трансфигурацией) соединения многоугольником в эквива-

лентное соединение звездой. Трансфигурация производится так, чтобы при тех же напряжениях между внешними зажимами в каждой фазе действовала бы прежняя мощность, все напряжения сохраняли бы свои отношения и сдвиги фаз между напряжением и током имели бы прежние значения.

Предположим, требуется преобразовать m -фазную систему, соединенную многоугольником, в такую же m -фазную систему, соединенную звездой (фиг. 132). Обозначим величины, относящиеся к одной фазе, в схеме многоугольника через соответствующие буквы с индексами a :

$$U_a; I_a; r_a; x_a; \varphi_a,$$

а величины, относящиеся к одной фазе звезды, через буквы с индексом 1, 2, ..., например, для первой фазы;

$$U_1; I_1; r_1; x_1; \varphi_1.$$

Фазовый ток в звезде $I_1 = I_A$ равен току в линии, в многоугольнике же ток в линии выражается через фазовый ток следующим образом:

$$I_A = I_1 = I_a \cdot 2 \sin \frac{\pi}{m}. \quad (44,1)$$

Так как токи в подводящих проводах при трансфигурации должны сохранить свое значение, а мощности и сдвиги в каждой фазе должны также остаться без изменения:

$$\begin{aligned} U_1 I_1 \cos \varphi_1 &= U_a I_a \cos \varphi_a; \quad \varphi_1 = \varphi_a; \\ r_1 I_1^2 &= r_a I_a^2; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_a = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_a}{r_a}, \end{aligned}$$

то искомые сопротивления звезды выразятся следующим образом через сопротивления многоугольника:

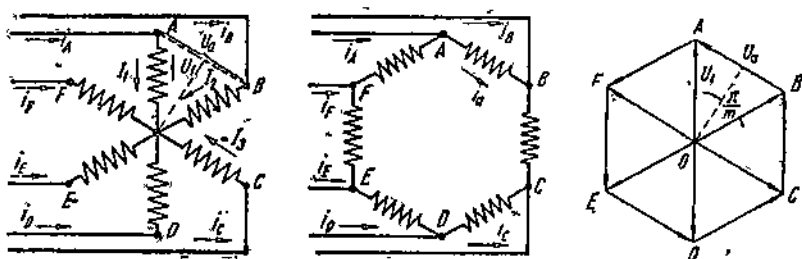
$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{I_a^2}{I_1^2} r_a = \frac{r_a}{4 \sin^2 \frac{\pi}{m}}; \\ x_1 &= x_a \frac{r_1}{r_a} = \frac{x_a}{4 \sin^2 \frac{\pi}{m}}; \\ z_1 &= \frac{z_a}{4 \sin^2 \frac{\pi}{m}}. \end{aligned} \right\} \quad (44,2)$$

Изменяя сопротивления каждой фазы согласно этим уравнениям, которые имеют силу только для симметричных систем при одинаковой нагрузке, мы можем соединение фаз многоугольником заменить соединением звездой; при этом фазовое напряжение в звезде будет равно

$$U_1 = \frac{U_a}{2 \sin \frac{\pi}{m}}, \quad (44,3)$$

так как при соединении многоугольником фазовые и линейные напряжения равны, в соединении же звездой фазовые и линейные напряжения связаны уравнением (42,3), и напряжения между внешними зажимами не должны изменяться при трансфигурации.

Пользуясь этими формулами, можно сделать и наоборот: соединение звездой, если это потребовалось бы, заменить эквивалентным много-



Фиг. 132. Трансфигурация m -фазного многоугольника в m -фазную звезду.

угольником. В этом случае сопротивления многоугольника выразились бы через сопротивления звезды следующим образом:

$$r_a = r_1 \cdot 4 \sin^2 \frac{\pi}{m}; \quad x_a = x_1 \cdot 4 \sin^2 \frac{\pi}{m},$$

а напряжения и токи были бы

$$U_a = U_1 \cdot 2 \sin \frac{\pi}{m} \quad \text{и} \quad I_a = \frac{I_1}{2 \sin \frac{\pi}{m}}. \quad (44,4)$$

При преобразовании трехфазных симметричных схем (фиг. 133) мы имеем

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sqrt{3} I_a; \quad U_1 = \frac{U_a}{\sqrt{3}}; \\ r_1 I_1^2 &= r_a I_a^2; \\ r_1 &= \frac{r_a}{3} \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{x_a}{3}, \end{aligned} \right\} \quad (44,5)$$

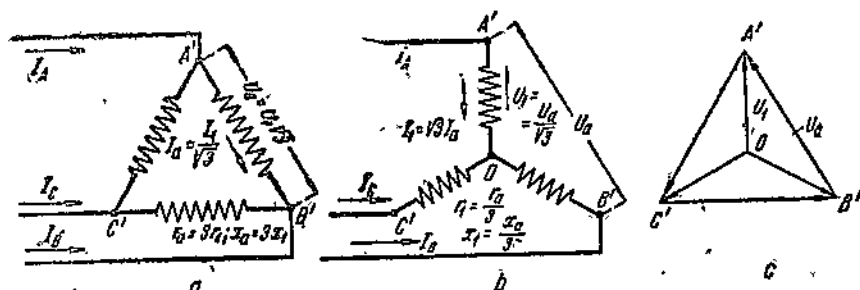
т. е. при переходе от треугольника к звезде все сопротивления надо уменьшить в три раза. Фазовое напряжение в звезде будет в $\sqrt{3}$ раза меньше, а фазовый ток в $\sqrt{3}$ раза больше, чем напряжение и ток в треугольнике. При преобразовании звезды в треугольник все сопротивления надо увеличить в три раза, фазовое напряжение увеличить в $\sqrt{3}$ раза, а фазовый ток уменьшить также в $\sqrt{3}$ раза:

$$r_a = 3r_1; \quad x_a = 3x_1; \quad U_a = \sqrt{3} U_1; \quad I_a = \frac{I_1}{\sqrt{3}}. \quad (44,6)$$

Так как в симметричной системе, в которой как генератор, так и приемник энергии соединены звездой, нейтральные точки имеют всегда

один и тот же потенциал, то мы мысленно можем считать нейтральные точки соединенными накоротко, а это позволяет нам при исследовании многофазной системы ограничиться рассмотрением одной фазы, полагая, что она является простой неразветвленной цепью однофазного тока, в которой последовательно соединен ряд сопротивлений и действует фазовое напряжение или фазовая э. д. с.

Если для каждой из фаз построить соответствующие векторные диаграммы, сдвинутые на угол между фазами, а затем преобразованные



Фиг. 133. Трансфигурация треугольника в звезду.

звезды преобразовать в многоугольники и определить для них токи и напряжения, то задача расчета многоугольника может считаться решенной.

45. Уравновешенные многофазные системы

Мгновенная мощность однофазного переменного тока (см. § 3)

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin (\omega t - \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)]$$

есть величина переменная, которая при среднем значении

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi \quad (45,1)$$

изменяется с двойной частотой и достигает за период дважды своего максимума

$$p_{\max} = UI (\cos \varphi + 1) \quad (45,2)$$

и дважды своего минимума, который имеет отрицательное значение:

$$p_{\min} = UI (\cos \varphi - 1). \quad (45,3)$$

Благодаря пульсациям мощности генераторы и моторы однофазного тока испытывают переменный момент вращения, и в этом отношении система однофазного тока представляет собой систему неуравновешенную.

В многофазной системе мгновенная мощность равна сумме мгновенных значений мощностей составляющих ее фаз. Если нам дана m -фазная система со сдвигом $\frac{2\pi}{m}$ между отдельными фазами (что соответствует

сдвигу во времени $\frac{T}{m}$), то мгновенные мощности отдельных фаз соответственно равны:

$$\begin{aligned} p_1 &= u_1 i_1 = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)]; \\ p_2 &= u_2 i_2 = \frac{U_m I_m}{2} \left[\cos \varphi - \cos \left(2\omega t - \frac{4\pi}{m} - \varphi \right) \right]; \\ p_3 &= u_3 i_3 = \frac{U_m I_m}{2} \left[\cos \varphi - \cos \left(2\omega t - 2 \frac{4\pi}{m} - \varphi \right) \right]; \\ &\dots \dots \dots \\ p_m &= u_m i_m = \frac{U_m I_m}{2} \left\{ \cos \varphi - \cos \left[2\omega t - (m-1) \frac{4\pi}{m} - \varphi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (45,4)$$

При сложении сумма вторых членов дает нуль, а потому мгновенная мощность

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_m = m \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = m UI \cos \varphi = P \quad (45,5)$$

в многофазной симметричной системе есть величина постоянная, не зависящая от времени.

Мгновенная мощность будет постоянна и тогда, когда сдвиги между отдельными фазами равны не $\frac{2\pi}{m}$, а $\frac{\pi}{m}$ при условии одинаковой нагрузки всех фаз, в силу того, что мощность пульсирует с двойной частотой. В этом отношении система двухфазного тока, хотя она и представляет собой несимметричную систему, все же является системой уравновешенной, так как сумма мгновенных мощностей двух ее фаз составляет

$$\begin{aligned} p_1 &= u_1 i_1 = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin (\omega t - \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)], \\ p_2 &= u_2 i_2 = U_m \sin (\omega t - 90^\circ) \cdot I_m \sin (\omega t - 90^\circ - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - 180^\circ - \varphi)], \\ p &= p_1 + p_2 = 2 \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = 2 UI \cos \varphi = P. \end{aligned} \quad (45,6)$$

Мгновенная мощность трех фаз симметричной трехфазной системы в случае одинаковой нагрузки трех фаз определяется как

$$\begin{aligned} p_1 &= u_1 i_1 = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin (\omega t - \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)]; \\ p_2 &= u_2 i_2 = U_m \sin (\omega t - 120^\circ) \cdot I_m \sin (\omega t - 120^\circ - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - 240^\circ - \varphi)]; \\ p_3 &= u_3 i_3 = U_m \sin (\omega t - 240^\circ) \cdot I_m \sin (\omega t - 240^\circ - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - 120^\circ - \varphi)]; \\ P &= p = p_1 + p_2 + p_3 = 3 \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = 3 U_\phi I_\phi \cos \varphi \end{aligned} \quad (45,7)$$

и равна средней мощности. В последнем уравнении U_ϕ и I_ϕ — эффективные значения фазовых напряжений и токов, а φ — угол сдвига между ними.

Обыкновенно в трехфазной системе даются линейное напряжение и линейный ток, т. е. напряжение между зажимами или проводами и ток в проводах, по которым передается энергия.

В случае соединения звездой ток в фазе равен линейному току $I_\phi = I_\lambda$, а фазовое напряжение $U_\phi = \frac{U_\lambda}{\sqrt{3}}$.

В случае же соединения треугольником фазовое напряжение равно линейному напряжению $U_\phi = U_\lambda$, а ток в фазе равен $I_\phi = \frac{I_\lambda}{\sqrt{3}}$.

Поэтому мощность трехфазной системы в случае одинаковой нагрузки всех трех фаз независимо от схемы соединения может быть выражена одной и той же формулой:

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3} U_\lambda I_\lambda \cos \varphi = \sqrt{3} UI \cos \varphi, \quad (45,8)$$

где U — эффективное значение линейного напряжения; I — эффективное значение тока в линии; φ — угол сдвига между линейным напряжением и линейным током, а угол сдвига между напряжением и током в фазе.

Рассмотренные выше системы при одинаковой нагрузке фаз как системы, дающие постоянную мгновенную мощность, являются системами, уравновешенными в отличие от системы однофазного тока и таких же многофазных систем с неодинаковой нагрузкой фаз.

Задача 28. Определить необходимое сечение медных проводов для передачи на расстояние $l = 200$ м; мощности $P = 50$ кВт при напряжении $U = 380$ В и коэффициенте мощности $\cos \varphi = 0,8$, чтобы потери энергии не превышали $p = 3\%$.

Решение. При сопротивлении одного провода $r = \frac{l}{\gamma S}$, где $\gamma = 57 \frac{\text{м}}{\Omega \text{ мм}^2}$, потери энергии в проводах составляют

$$3 r I_\lambda^2 = \frac{3 I_\lambda^2 l}{\gamma S} = 0,01 p P = 0,01 p \sqrt{3} UI \cos \varphi,$$

откуда

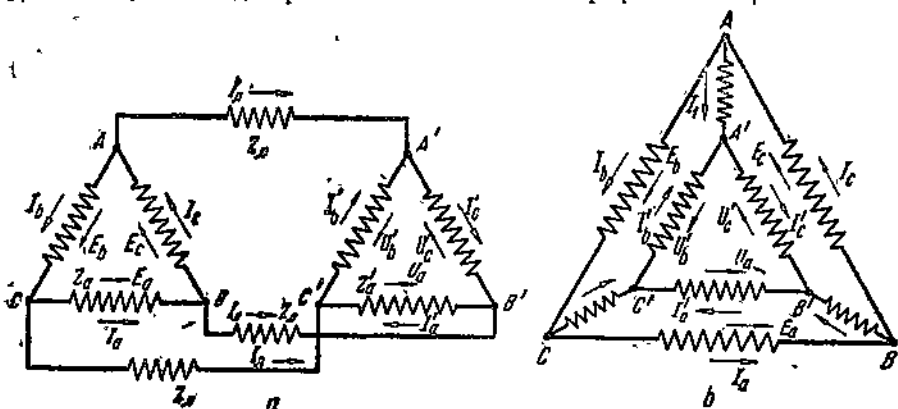
$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{3} P l}{\gamma \cdot 0,01 p U \cos \varphi} \cdot \frac{U \cos \varphi}{U \cos \varphi} = \frac{P l}{\gamma \cdot 0,01 p U^2 \cos^2 \varphi} = \\ &= \frac{50\,000 \text{ Вт} \cdot 200 \text{ м}}{57 \frac{\text{м}}{\Omega \text{ мм}^2} \cdot 0,01 \cdot 3 \cdot 380^2 \text{ В}^2 \cdot 0,8^2} = 63,5 \text{ мм}^2. \end{aligned}$$

Выбираем ближайшее большее сечение по стандарту $S = 70 \text{ мм}^2$.

46. Топографические диаграммы

Нахождение напряжений между отдельными точками многофазной системы значительно облегчается и приобретает большую наглядность, если потенциал какой-нибудь точки системы принять за исходный или за нуль и для всех рассматриваемых точек разветвленной цепи или

схемы соединения найти на векторной диаграмме такие точки, чтобы линии, соединяющие эти последние точки с нулевой точкой диаграммы, по своей длине (в определенном масштабе) и по своему направлению (по отношению к какой-нибудь определенной линии) соответствовали по величине и фазе векторам напряжения между рассматриваемыми точками и нулевой точкой. При таком способе вычерчивания диаграммы потенциал¹ каждой точки схемы будет определяться ее положением на диаграмме, и напряжение между двумя любыми точками цепи будет определяться по величине и направлению отрезком, соединяющим эти две точки. Такие диаграммы называются топографическими.



Фиг. 134. Схема к задаче 29.

В применении к соединению звездой за исходную точку можно принять нейтральную точку генератора и по отношению к этой точке определять положения на диаграмме (т. е. потенциалы) всех остальных точек системы.

Примем вертикальную линию за начальную ось (ось действительных величин), по отношению к которой мы будем определять фазы всех векторов. Покажем применение этого так называемого топографического метода на следующей задаче.

Задача 29. Дан генератор (фиг. 134), соединенный треугольником, с.з. д. с., $E_a = 215$ В и сопротивлением

$$Z_a = r_a + jx_a = 0,3 + j0,9 \Omega$$

в каждой фазе. Генератор тремя проводами с сопротивлениями $Z_a = r_a + jx_a = 0,1 + j0,08 \Omega$ соединен с приемником энергии, соединенным также в треугольник с сопротивлениями

$$Z'_a = r'_a + jx'_a = 1,8 + j1,35 \Omega$$

в каждой фазе. Определить напряжения у зажимов генератора и приемника энергии и токи в фазах генератора и приемника энергии, а также токи в линии.

¹ В электротехнике не совсем правильно применяют слово потенциал и к переменным напряжениям, если желают характеризовать то напряжение, которое имеет какая-нибудь точка системы по отношению к другой, принятой за исходную, и соединенной, например, с землей.

Решение. Преобразуем заданную нам симметричную систему в звезду (фиг. 135):

$$\dot{E}_1 = \frac{E_a}{\sqrt{3}} = \frac{215}{\sqrt{3}} \text{ В} = 124 \text{ В};$$

$$Z_1 = \frac{Z_a}{3} = 0,1 + j0,3 \Omega; \quad Z'_1 = \frac{Z'_a}{3} = 0,6 + j0,45 \Omega.$$

Общее сопротивление одной цепи в приведенной звезде равно

$$Z = ze^{-j\varphi} = r + jx = Z_1 \oplus Z_a + Z'_1 = 0,1 + j0,3 + 0,1 + j0,08 + 0,6 + j0,45 \Omega = 0,8 + j0,83 \Omega = 1,15 \angle 46^\circ \Omega.$$

Ток в приведенной звезде будет

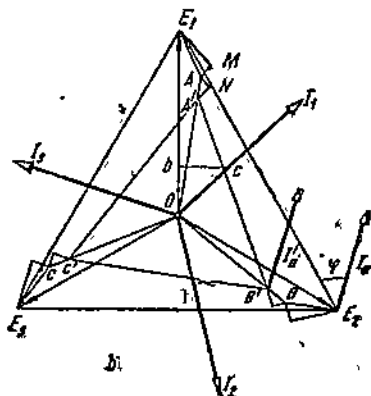
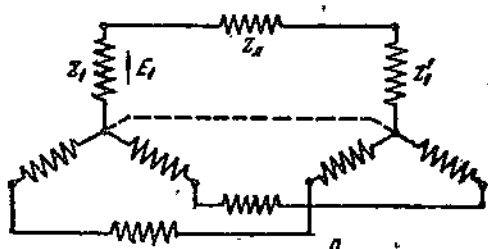
$$I_1 = I_a = \frac{124}{\sqrt{0,8^2 + 0,83^2}} = 107,8 \text{ А.}$$

Принимаем потенциал нулевой точки преобразованного генератора за исходный и откладываем (фиг. 135, б), э. д. с. первой фазы по вертикали $\dot{E}_1 = m_U \overline{OE_1}$ и э. д. с. двух других фаз — под углами 120° . Тогда отрезки $\overline{E_2E_1}$, $\overline{E_3E_2}$ и $\overline{E_1E_3}$ определяют напряжения между зажимами ненагруженного генератора. Для построения вектора тока откладываем на линии OE_1 отрезок, пропорциональный r

$$Ob = m_U \cdot 0,8 \Omega$$

и перпендикулярно к нему

$$bc = m_U \cdot 0,83 \Omega.$$



Фиг. 135. Приведенная схема и топографическая диаграмма к задаче 29.

По линии Oc в выбранном масштабе откладываем

$$OI_1 = m_I \cdot 107,8 \text{ А.}$$

Напряжение между зажимами первой фазы генератора и его воображаемой центральной точкой будет отличаться от E_1 на падение напряжения в сопротивлении Z_1 , поэтому

$$\dot{U}_1 = \dot{E}_1 - Z_1 I_1 = \dot{E}_1 - (r_1 + jx_1) \dot{I}_1 = m_U \cdot \overline{OE_1} + m_U \cdot \overline{E_1 M} - m_U \cdot \overline{MA} = m_U \cdot \overline{OA}.$$

Здесь

$$m_U \cdot \overline{E_1 M} = -jx_1 \dot{I}$$

есть индуктивное падение напряжения, взятое с отрицательным знаком, а потому оно отстает от вектора тока на 90° , а $m_U \cdot \overline{MA} = -r_1 \dot{I}_1$ — активное падение напряжения, взятое также со знаком минус, а потому отложенное в сторону, противоположную току. Положение точки A определяет напряжение

зажима A по отношению к нейтральной точке. Если мы построим такие же векторы для двух других фаз, то получим треугольник напряжений ABC , соответствующий напряжениям между зажимами A , B и C генератора при нагрузке. Чтобы получить напряжения между зажимами приемника энергии, мы должны от точки A диаграммы отложить падение напряжения в линии. Тогда получим

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 - Z_A \dot{I}_1 = \dot{U}_1 - (r_A + jx_A) \dot{I}_1 = m_U \cdot \overline{OA} + m_U \cdot \overline{AN} + m_U \cdot \overline{NA}' = m_U \cdot \overline{OA}',$$

где

$$m_U \cdot \overline{AN} = -jx_A \dot{I}_1 \text{ и } m_U \cdot \overline{NA}' = -r_A \dot{I}_1$$

— составляющие падения напряжения в линии. Повторяя такое же построение для других фаз, мы получаем треугольник напряжений $A'B'C'$, стороны которого по величине и направлению определяют напряжение между зажимами у приемника энергии. Токи в фазах генератора и приемника энергии, соединенных в треугольник, равны между собой; по величине они в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем токи в линии, поэтому

$$I_a = I_a' = \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \frac{107,8}{\sqrt{3}} \text{ A} = 68 \text{ A}.$$

Так как сдвиг фаз токов при трансфигурации меняется на 30° , то строим в точках B' и E_a векторы токов под углом $\varphi - 30^\circ$ к вертикали. Если повторить те же построения для других фаз, то такая диаграмма дает наглядное представление о распределении напряжений и токов в рассмотренной схеме.

47. Неодинаковая нагрузка трехфазной системы

При неодинаковой нагрузке многофазной системы симметрия напряжений и токов в отдельных частях цепи может быть в значительной мере нарушена. В таких случаях нельзя свести расчет многофазной системы к расчету однофазной цепи, и приходится прибегать к аналитическому способу решения при помощи векторных (комплексных) уравнений. Попутно полезно строить топографическую диаграмму напряжений.

Предположим, что к трехфазному генератору (или трансформатору), соединенному звездой (фиг. 136), внутренним падением напряжения, в котором мы можем пренебречь, присоединен приемник энергии, соединенный звездой, нейтральная точка которого соединена с нейтральной точкой генератора проводником, имеющим некоторое сопротивление. Пусть фазовые напряжения генератора имеют произвольные значения:

$$\dot{U}_1 = m_U \cdot \overline{OA}, \quad \dot{U}_2 = m_U \cdot \overline{OB} \text{ и } \dot{U}_3 = m_U \cdot \overline{OC},$$

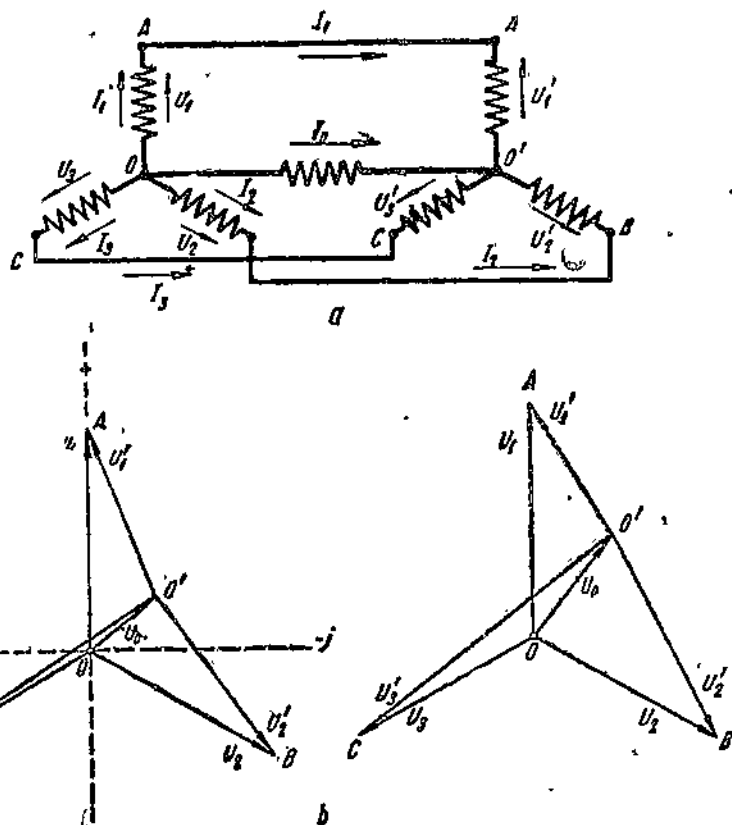
а проводимости звезды приемника энергии и нейтрального провода соответственно равны:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1}; \quad Y_2 = \frac{1}{Z_2}; \quad Y_3 = \frac{1}{Z_3}; \quad Y_0 = \frac{1}{Z_0}.$$

Будем считать, что положительные направления токов во всех ветвях схемы направлены от нулевой точки генератора O к нулевой точке приемника энергии O' , так что

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_0 = 0.$$

Так как система не уравновешена, то потенциалы точек O и O' не равны. Потенциал точки O' ниже потенциала точки O на величину падения напряжения в $Z_0 = \frac{1}{Y_0}$, т. е. на некоторую величину $Z_0 \dot{I}_0$. По-



Фиг. 136. Неодинаковая нагрузка трехфазной звезды с нулевым и без нулевого провода.

этому, если мы потенциал точки O принимаем за нуль, то напряжение между точками O' и O равно

$$\dot{U}_0 = -Z_0 \dot{I}_0 = m_U \cdot \overline{OO'}$$

или

$$\dot{I}_0 = -\frac{\dot{U}_0}{Z_0} = -Y_0 \dot{U}_0.$$

Если фазовое напряжение точки A по отношению к точке O будет $\dot{U}_1 = m_U \cdot \overline{OA}$, то очевидно, что напряжение первой фазы приемника энергии будет

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = m_U \cdot \overline{OA} - m_U \cdot \overline{OO'} = m_U \cdot \overline{O'A},$$

а ток в первой фазе составит

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_0}{Z_1} = Y_1(\dot{U}_1 - \dot{U}_0) \quad (47,1)$$

и аналогично для других фаз

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= Y_2(\dot{U}_2 - \dot{U}_0), \\ \dot{I}_3 &= Y_3(\dot{U}_3 - \dot{U}_0). \end{aligned}$$

Складывая все токи, мы получаем уравнение

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_0 &= \\ &= Y_1(\dot{U}_1 - \dot{U}_0) + Y_2(\dot{U}_2 - \dot{U}_0) + Y_3(\dot{U}_3 - \dot{U}_0) - Y_0\dot{U}_0 = 0, \end{aligned}$$

из которого мы можем определить по величине и фазе напряжение между нулевой точкой приемника и нулевой точкой генератора

$$\dot{U}_0 = \frac{Y_1\dot{U}_1 + Y_2\dot{U}_2 + Y_3\dot{U}_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0} = \frac{\sum Y\dot{U}}{\sum Y + Y_0} \quad (47,2)$$

Это напряжение определяется как сумма произведений напряжений отдельных фаз на их проводимости, деленная на сумму проводимостей всех фаз и проводимости нулевой ветви.

Если бы мы взяли вместо трехфазной n -фазную систему, то получили бы аналогичный результат.



Фиг. 137. Неодинаковая нагрузка трехфазной сети.

От системы, соединенной в звезду с нулевым проводом, легко перейти к системе звезды без нулевого провода. Для этого следует лишь предположить, что при отсутствии соединения нулевых точек проводимость нулевой ветви $Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{\infty} = 0$ равна нулю, и тогда напряжение между нулевыми точками определится через

$$\dot{U}_0 = \frac{Y_1\dot{U}_1 + Y_2\dot{U}_2 + Y_3\dot{U}_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{\sum Y\dot{U}}{\sum Y} \quad (47,3)$$

Найдя величину $\dot{U}_0$, токи в отдельных фазах определяются по уравнениям (47,1).

Если нам задаются не фазовые напряжения, а линейные напряжения, приложенные к концам фаз $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{U}_{CA}$ (фиг. 137), составляю-

щие замкнутый треугольник, который может быть и неравносторонним, то можно определить распределение напряжений и токов следующим образом:

Пусть

$$\dot{U}_1 = m_U \overline{OA}; \quad \dot{U}_2 = m_U \overline{OB} \quad \text{и} \quad \dot{U}_0 = m_U \cdot \overline{OC}$$

— искомые фазовые напряжения, которые связаны с линейными напряжениями уравнениями

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2, \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_2 - \dot{U}_3, \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_3 - \dot{U}_1.$$

Сумма токов, сходящихся в нулевой точке звезды, должна равняться нулю:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = Y_1 \dot{U}_1 + Y_2 \dot{U}_2 + Y_3 \dot{U}_3 = 0.$$

Подставляя в последнее уравнение вместо $\dot{U}_2 = \dot{U}_1 - \dot{U}_{AB}$ и $\dot{U}_3 = \dot{U}_1 + \dot{U}_{CA}$, мы из уравнения

$$Y_1 \dot{U}_1 + Y_2 (\dot{U}_1 - \dot{U}_{AB}) + Y_3 (\dot{U}_1 + \dot{U}_{CA}) = 0$$

можем определить $\dot{U}_1$:

$$\dot{U}_1 = \frac{Y_2 \dot{U}_{AB} - Y_3 \dot{U}_{CA}}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{Y_2 \dot{U}_{AB} + Y_3 \dot{U}_{AC}}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = m_U \cdot \overline{OA}, \quad (47,4a)$$

и аналогично для других фаз

$$\dot{U}_2 = \frac{Y_3 \dot{U}_{BC} + Y_1 \dot{U}_{BA}}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, \quad (47,4b)$$

$$\dot{U}_3 = \frac{Y_1 \dot{U}_{CA} + Y_2 \dot{U}_{CB}}{Y_1 + Y_2 + Y_3}. \quad (47,4c)$$

Зная же $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$, можно определить и токи $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$.

Для построения диаграммы вычерчиваем по трем сторонам, пропорциональным заданным напряжениям $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{U}_{CA}$, треугольник ABC , а затем у точки A строим вектор

$$\begin{aligned} -\dot{U}_1 &= -m_U \cdot \overline{OA} = m_U \cdot \overline{AO} = -\frac{Y_2 \dot{U}_{AB} + Y_3 \dot{U}_{AC}}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \\ &= \frac{Y_2 \dot{U}_{BA} + Y_3 \dot{U}_{CA}}{Y_1 + Y_2 + Y_3}. \end{aligned}$$

Значение вектора $-\dot{U}_1 = m_U \cdot \overline{AO}$ может быть найдено или вычислением или графическим путем. В последнем случае разбиваем $-\dot{U}_1$ на две слагающие:

$$\frac{Y_2 \dot{U}_{BA}}{\sum Y} = \frac{Y_2 m_U \cdot \overline{AB}}{\sum Y}; \quad \frac{Y_3 \cdot \dot{U}_{CA}}{\sum Y} = \frac{Y_3 m_U \cdot \overline{AC}}{\sum Y}$$

и находим их путем построения (фиг. 138). Для этого определяем вектор суммы проводимостей.

$$\sum Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = m_Y \cdot \overline{O_1 a_1} + m_Y \cdot \overline{O_1 a_2} + m_Y \cdot \overline{O_1 a_3} = m_Y \cdot \overline{O_1 a}$$

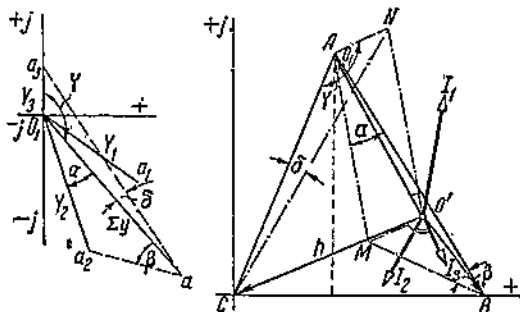
и строим подобные треугольники

$$\triangle ABM \sim \triangle O_1 a a_2 \text{ и } \triangle ACN \sim \triangle O_1 a a_3,$$

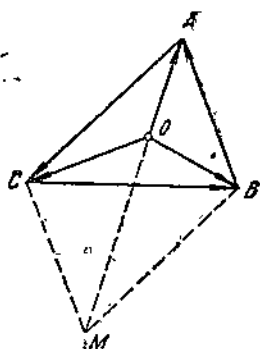
которые дадут нам отрезки $AM = AB \cdot \frac{Y_2}{\sum Y}$ и $AN = AC \cdot \frac{Y_3}{\sum Y}$. Геометрическая сумма этих отрезков

$$m_U \cdot \overline{AM} + m_U \cdot \overline{AN} = \frac{\dot{U}_{BA} Y_2}{\sum Y} + \frac{\dot{U}_{CA} Y_3}{\sum Y} = m_U \cdot \overline{AO} = -\dot{U}_1$$

и определяет положение нулевой точки звезды в векторной диаграмме.



Фиг. 138.



Фиг. 139. Векторная диаграмма звезды, когда $Y_1 = Y_2 = Y_3$.

Рассмотрим ряд частных случаев:

I. Когда сопротивления или проводимости всех трех ветвей звезды равны между собой: $Y_1 = Y_2 = Y_3$. Это могут быть или активные сопротивления, или индуктивности, или емкости, или соединения из них. В этом случае нулевая точка лежит в центре тяжести треугольника напряжений ABC (фиг. 139). Действительно, для этого случая

$$-\dot{U}_1 = m_U \cdot \overline{AO} = \frac{\dot{U}_{BA} + \dot{U}_{CA}}{3} = \frac{m_U \cdot \overline{AB} + m_U \cdot \overline{AC}}{3} = \frac{m_U \cdot \overline{AM}}{3}$$

(нулевая точка лежит на одной трети диагонали параллелограмма, построенного на двух сторонах треугольника линейных напряжений или на $2/3$ медианы, считая от вершины треугольника).

II. Когда ветви звезды состоят из однородных сопротивлений, дающих во всех фазах одинаковые сдвиги между фазовыми напряжениями и токами,

$$Y_1 = y_1 e^{-j\varphi}; \quad Y_2 = y_2 e^{-j\varphi}; \quad Y_3 = y_3 e^{-j\varphi},$$

то уравнение для определения напряжения между нулевыми точками весьма упрощается:

$$\dot{U}_0 = \frac{y_1 \dot{U}_1 + y_2 \dot{U}_2 + y_3 \dot{U}_3}{y_1 + y_2 + y_3},$$

и ток, например, в первой фазе будет

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_1(\dot{U}_1 - \dot{U}_0) = e^{-j\varphi} \frac{y_1 y_2 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + y_1 y_3 (\dot{U}_1 - \dot{U}_3)}{y_1 + y_2 + y_3} \cdot \frac{z_1 z_2 z_3}{z_1 z_2 z_3} = \\ &= \frac{z_3 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + z_2 (\dot{U}_1 - \dot{U}_3)}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1} e^{-j\varphi} \end{aligned} \quad (47,5)$$

Если выбрать направление $\dot{U}_1 = U$ — совпадающим с положительным направлением оси действительных величин (положим по вертикали), то

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_2 = \frac{3}{2} U + j \frac{\sqrt{3}}{2} U$$

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_3 = \frac{3}{2} U - j \frac{\sqrt{3}}{2} U,$$

а потому ток I в комплексной форме выразится через

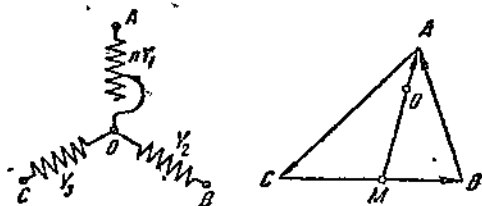
$$\dot{I}_1 = \frac{\frac{3}{2} (z_2 + z_3) + j \frac{\sqrt{3}}{2} (z_2 - z_3)}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1} U e^{-j\varphi} \quad (47,6)$$

а числовое значение тока I_1 будет равно

$$I_1 = \frac{\sqrt{3} \sqrt{z_2^2 + z_3^2 + z_2 z_3}}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1} U. \quad (47,7)$$

Токи в других фазах получают путем круговой замены индексов. Применяя последнюю формулу, удастся иногда определить распределение токов проще, чем при помощи метода симметричных составляющих.

III. Когда два из трех однородных сопротивлений остаются неизменными (фиг. 140), а одно меняется по своей величине,



Фиг. 140. Схема и диаграмма напряжений звезды при однородных проводимостях.

$$Y_2 = y_2 e^{-j\varphi}; \quad Y_3 = y_3 e^{-j\varphi};$$

$$Y_1 = \mu y_1 e^{-j\varphi},$$

где μ — числовой множитель, меняющийся в зависимости от величины, введенной в первую фазу проводимости.

При такой нагрузке

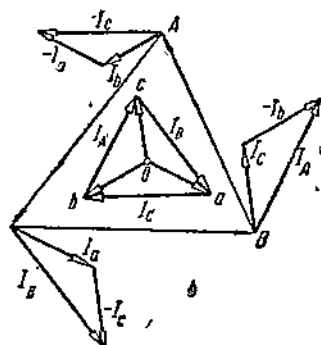
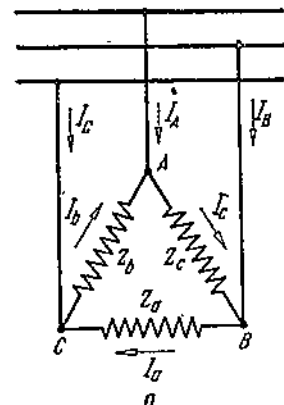
$$-\dot{U}_1 = m_U \cdot \overline{AO} = \frac{y_2 e^{-j\varphi} \dot{U}_{BA} + y_3 e^{-j\varphi} \dot{U}_{CA}}{\mu y_1 e^{-j\varphi} + y_2 e^{-j\varphi} + y_3 e^{-j\varphi}} = \frac{y_2 U_{BA} + y_3 U_{CA}}{(y_2 + y_3) \left(1 + \frac{\mu y_1}{y_2 + y_3}\right)};$$

вектор $-\dot{U}_1$, или линия $\overline{AO}$, имеет постоянное направление, т. е. при изменении нагрузки первой фазы нулевая точка перемещается по прямой линии. Когда $\mu y_1 = 0$, т. е. первая фаза разомкнута, то вторая

и третья фазы будут соединены последовательно, через них будет проходить один и тот же ток ($\dot{I}_3 = \dot{I}_2$), и действующее на их концах напряжение $\dot{U}_{BG} = m_U \cdot \overline{CB}$ будет делиться ввиду однородности Y_2 и Y_3 прямо пропорционально сопротивлениям или обратно пропорционально численным значениям проводимостей второй и третьей фаз. Поэтому при $nY_1 = 0$ точка O будет находиться на линии BC , и ее положение будет определяться из соотношения

$$\frac{CM}{CB} = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{Y_3}{Y_2 + Y_3}.$$

Когда же $nY_1 = \infty$, что соответствует короткому замыканию первой фазы, нулевая точка будет совпадать с точкой A . Таким образом при изменении проводимости первой фазы от 0 до ∞ или ее сопротивления от ∞ до 0 нулевая точка перемещается по линии MA от A к M ,



и геометрическое место нулевой точки ограничивается отрезком AM .

Задача о неодинаковой нагрузке трехфазной системы, соединенной в треугольник, решается просто, так как по заданным линейным напряжениям легко находятся токи в каждой фазе.

Фиг. 141. Неодинаковая нагрузка трехфазной системы, соединенной треугольником.

Для лучшей ориентации будем приписывать токам, сопротивлениям и проводимостям в сторонах (фазах) треугольника в качестве индексов малые буквы; соответствующие большим буквам противоположных вершин (фиг. 141). При таком обозначении мы имеем

$$\dot{I}_a = Y_a \dot{U}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_a}; \quad \dot{I}_b = Y_b \dot{U}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_b};$$

$$\dot{I}_c = Y_c \dot{U}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_c}.$$

Токи в подводящих проводах определяются как геометрические разности токов в смежных фазах:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_c - \dot{I}_b, \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_a - \dot{I}_c, \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_b - \dot{I}_a, \end{aligned} \right\} \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \quad (47,8)$$

Если векторы токов в фазах построить около какой-нибудь точки O

$$\dot{I}_a = m_I \cdot \overline{oa}; \dot{I}_b = m_I \cdot \overline{ob}; \dot{I}_c = m_I \cdot \overline{oc},$$

то линейные токи будут равны взятым в соответствующем масштабе сторонам треугольника, вершинами которого являются концы векторов токов в сторонах треугольника:

$$\dot{I}_A = m_I \cdot \overline{bc}; \dot{I}_B = m_I \cdot \overline{ca}; \dot{I}_C = m_I \cdot \overline{ab}.$$

Задача 30. Определить токи и напряжения в приемнике энергии, соединенном звездой с проводимостями

$$Y_1 = 0,1 - j0,2 \frac{1}{\Omega} = 0,224 \angle -63^\circ 30' \frac{1}{\Omega};$$

$$Y_2 = 0,05 + j0,1 \frac{1}{\Omega} = 0,112 \angle 63^\circ 30' \frac{1}{\Omega}; \quad Y_3 = 0,15 \frac{1}{\Omega}$$

и питаемом от генератора, соединенного звездой с фазовыми напряжениями $U_1 = 125 \text{ В}$; $U_2 = 115 \text{ В}$; $U_3 = 110 \text{ В}$, сдвинутыми друг относительно друга на 120° : 1) в случае наличия соединения между нейтральными точками с проводимостью $Y_0 = 0,2 \frac{1}{\Omega}$ и 2) когда нейтральные точки не соединены между собой, $Y_0 = 0$.

Решение. Выражаем векторы напряжений генератора через комплексы:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = U_1 = 125 \text{ В}; \quad \dot{U}_2 = U_2 e^{-j\frac{2\pi}{3}} &= U_2 (\cos 120^\circ - j \sin 120^\circ) = \\ &= 115 (-0,5 - j0,866) \text{ В} = -57,5 - j99,6 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\dot{U}_3 = U_3 e^{-j\frac{4\pi}{3}} = 110 (-0,5 + j0,866) \text{ В} = -55 + j95,4 \text{ В}.$$

1. При наличии нулевого (или нейтрального) провода

$$\dot{U}_0 = \frac{\sum Y \dot{U}}{\sum Y + Y_0} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(0,1 - j0,2) 125 + (0,05 + j0,1) (-57,5 - j99,6) + 0,15 (-55 + j95,4)}{0,1 - j0,2 + 0,05 + j0,1 + 0,15 + 0,2} \text{ В} = \\ &= \frac{11,33 - j21,4}{0,5 - j0,1} \text{ В} = 30 - j36,2 \text{ В} = 47,6 \angle -50^\circ 50' \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\dot{U}'_1 = \dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 125 - 30 + j36,2 \text{ В} = 95 + j36,2 \text{ В} = 101,3 \angle 20^\circ 50' \text{ В};$$

$$\begin{aligned} \dot{U}'_2 = \dot{U}_2 - \dot{U}_0 &= -57,5 - j99,6 - 30 + j36,2 \text{ В} = -87,5 - j63,4 \text{ В} = \\ &= 107,5 \angle 216^\circ 10' \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}'_3 = \dot{U}_3 - \dot{U}_0 &= -55 + j95,4 - 30 + j36,2 \text{ В} = -85 + j131,6 \text{ В} = \\ &= 154,5 \angle 122^\circ 50' \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_1 = Y_1 \dot{U}'_1 = 0,224 e^{-j63^\circ 30'} \cdot 101,3 e^{j20^\circ 50'} \text{ А} = 22,7 e^{-j42^\circ 40'} \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = Y_2 \dot{U}'_2 = 0,112 e^{j63^\circ 30'} \cdot 107,5 e^{j216^\circ 10'} \text{ А} = 12 e^{j279^\circ 40'} \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = Y_3 \dot{U}'_3 = 0,15 \cdot 154,5 e^{j122^\circ 50'} \text{ А} = 23,2 e^{j122^\circ 50'} \text{ А};$$

$$\dot{I}_0 = -Y_0 \dot{U}_0 = 0,2 (-47,6 e^{-j50^\circ 50'}) \text{ А} = -9,52 e^{-j50^\circ 50'} \text{ А}.$$

2. При разомкнутых нейтральных точках

$$\dot{U}_0 = \frac{\sum Y \dot{U}}{\sum Y} = \frac{11,33 - j 21,4}{0,1 - j 0,2 + 0,05 + j 0,1 + 0,15} \dot{V} =$$

$$= 55,4 - j 52,9 \text{ В} = 76,6 \angle -43^\circ 40' \text{ В};$$

$$\dot{U}_1' = \dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 125 - (55,4 - j 52,9) \text{ В} = 69,6 + j 52,9 \text{ В} = 84,7 \angle 37^\circ 20' \text{ В};$$

$$\dot{U}_2' = \dot{U}_2 - \dot{U}_0 = -57,5 - j 99,6 - (55,4 - j 52,9) \text{ В} = -112,9 - j 46,3 \text{ В} =$$

$$= 122 \angle 202^\circ 30' \text{ В};$$

$$\dot{U}_3' = \dot{U}_3 - \dot{U}_0 = -55 + j 95,4 - (55,4 - j 52,9) \text{ В} = -110,4 + j 148,3 \text{ В} =$$

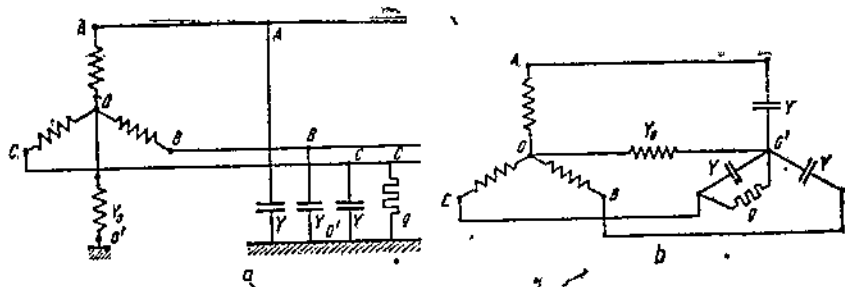
$$= 185 \angle 126^\circ 40' \text{ В};$$

$$\dot{I}_1 = Y_1 \dot{U}_1' = 0,224 e^{-j 63^\circ 30'} \cdot 84,7 e^{j 37^\circ 20'} \text{ А} = 19 \angle -26^\circ \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = Y_2 \dot{U}_2' = 0,112 e^{j 63^\circ 30'} \cdot 122 e^{j 202^\circ 30'} \text{ А} = 14 \angle 266^\circ \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = Y_3 \dot{U}_3' = 0,15 \cdot 185 e^{j 126^\circ 40'} \text{ А} = 27,7 \angle 126^\circ 40' \text{ А}.$$

На фиг. 136, б в масштабе вычерчена топографическая диаграмма напряжений для обоих случаев. При малых активных и больших индуктивных и емкостных проводимостях, особенно когда последние весьма близки друг к другу, нейтральная точка приемника энергии при отсутствии нулевого провода может выйти далеко за пределы треугольника ABC .



Фиг. 142. Катушка Петерсена.

Задача 31. Определить величину индуктивности реактивной катушки (Петерсена), включенной между землей и нейтральной точкой трехфазного генератора с симметричными напряжениями, работающего на симметричную сеть, обладающую большой емкостью, с тем чтобы при всяком заземлении какой-нибудь фазы, например, третьей, ток в заземляющей ветви равнялся нулю (фиг. 142). Пусть $U_1 = U_2 = U_3$ — напряжения генератора; $Y = j\omega C$ — приведенная емкостная проводимость каждой фазы по отношению к земле; g — произвольная проводимость заземления и $Y_0 = \frac{1}{j\omega L}$ — искомая проводимость реактивной катушки.

Решение. Вычертим схему этой задачи применительно к предыдущим выводам. Для определения тока в проводимости g нам необходимо определить напряжение между точками O и O' . Для этого определяем сначала напряжение U_0 между O и O' . Проводимости первой и второй фаз равны:

$$Y_1 = Y_2 = j\omega C = j 0,0003 \frac{1}{\Omega},$$

а проводимость третьей фазы равна $Y_3 = g + j\omega C$; поэтому

$$\begin{aligned}\dot{U}_0 &= \frac{\sum Y \dot{U}}{\sum Y + Y_0} = \frac{j\omega C \dot{U}_1 + j\omega C \dot{U}_2 + (g + j\omega C) \dot{U}_3}{-j\omega C + j\omega C + g + j\omega C - \frac{j}{\omega L}} = \\ &= \frac{j\omega C (\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3) + g \dot{U}_3}{g + j\left(3\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}.\end{aligned}$$

В симметричном генераторе $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0$. Следовательно,

$$\dot{U}_0 = \frac{g \dot{U}_3}{g + j\left(3\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}.$$

Напряжение между C и O' составляет

$$\dot{U}'_3 = \dot{U}_3 - \dot{U}_0 = \dot{U}_3 - \frac{g \dot{U}_3}{g + j\left(3\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{j\left(3\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{g + j\left(3\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \dot{U}_3,$$

а ток в заземляющей ветви

$$\dot{I}_g = g \dot{U}'_3 = \frac{j\left(3\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)g}{g + j\left(3\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \dot{U}_3.$$

Ток при всяких значениях g будет равен нулю, когда

$$3\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0.$$

Отсюда мы определяем

$$L = \frac{1}{3\omega^2 C} = \frac{1}{3 \cdot 314^2 \cdot 0,0003} \text{ Н} = 3,5 \text{ Н}.$$

При этих условиях при всяком соединении какой-нибудь из трех фаз с землей даже через конечное сопротивление $\left(r = \frac{1}{g}\right)$ соответствующая фаза приобретает потенциал земли

$$\dot{U}_0 = \frac{g \dot{U}_3}{g + j \cdot 0} = \dot{U}_3$$

и

$$\dot{U}'_3 = \dot{U}_3 - \dot{U}_0 = 0.$$

Задача 32. Трехфазный генератор (фиг. 143), соединенный в звезду с симметричными напряжениями в трех фазах, $U = 6 \text{ кВ}$, работает параллельно на кабельную симметричную сеть с приведенной емкостью каждой фазы по отношению к земле $C = 100 \text{ мФ}$ и на воздушную линию. Определить напряжения, которые получает генератор по отношению к земле, если одна фаза воздушной линии получает короткое замыкание на землю, а также найти зависимость этих напряжений от расстояния места короткого замыкания до генератора, если активное сопротивление одной фазы воздушной линии $r_0 = 0,2 \frac{\Omega}{\text{км}}$, а реактивное сопротивление одной фазы этой линии по отношению к земле равно $x_0 = 0,8 \frac{\Omega}{\text{км}}$.

Решение. Перечерчиваем схему фиг. 143 в более наглядном для составления уравнений виде. При исправной воздушной линии и равномерной нагрузке фаз точки O и O' имеют всегда один и тот же потенциал (потенциал земли). Когда одна фаза воздушной линии коротко замыкается на землю (например, первая фаза), то параллельно с емкостью этой фазы включается сопротивление

$$Z' = Z_0 l = (r_0 + jx_0) l = z_0 l e^{j\varphi} = z' e^{j\psi},$$

где $\operatorname{tg} \psi = \frac{x_0}{r_0}$, а l — переменное расстояние от места короткого замыкания до генератора. Если к проводимости первой фазы

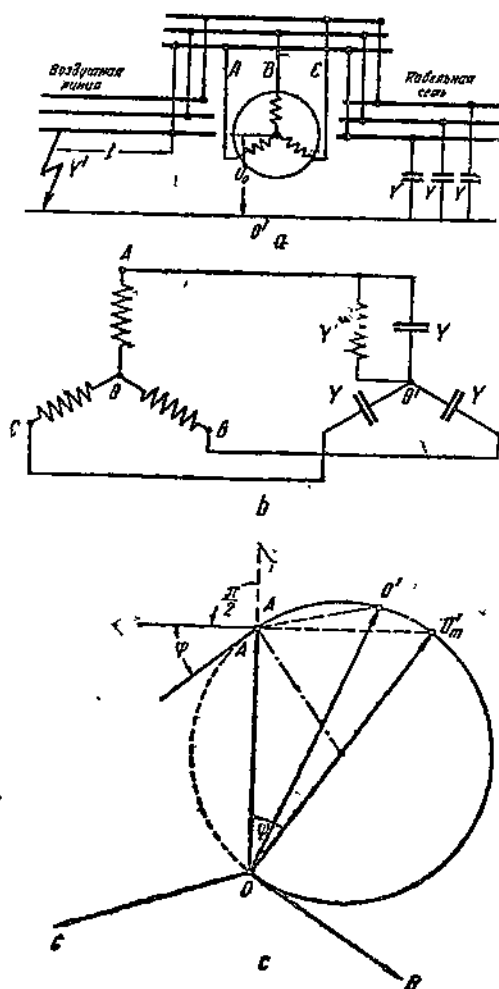
$Y = j\omega C = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}}$ включается параллельно проводимость $Y' = \frac{1}{Z'} = \frac{1}{z'} e^{-j\psi}$, то напряжение между точками O' и O будет

$$\begin{aligned} \dot{U}_0 &= \frac{\sum Y \dot{U}}{\sum Y} = \\ &= \frac{(Y + Y') \dot{U}_1 + Y \dot{U}_2 + Y \dot{U}_3}{Y + Y' + Y + Y} = \\ &= \frac{Y(\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3) + Y' \dot{U}_1}{3Y + Y'} = \\ &= \frac{Y' \dot{U}_1}{3Y + Y'} = \frac{\dot{U}_1}{1 + \frac{3Y}{Y'}} = \\ &= \frac{\dot{U}_1}{1 + 3\omega C e^{j\frac{\pi}{2}} z_0 l e^{j\psi}} = \\ &= \frac{\dot{U}_1}{1 + (3\omega C z_0) l e^{j(\frac{\pi}{2} + \psi)}}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение при переменном l представляет собой векторное уравнение окружности, которая определяется двумя точками, а именно, когда $l = \infty$, т. е. когда фактически нет короткого замыкания, тогда $\dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_1}{\infty} = 0$,

и когда первая фаза заземляется у самого генератора ($l = 0$), тогда $\dot{U}_0 = \dot{U}_1$ — и углом $\frac{\pi}{2} + \psi$ между касательной в точке A и ли-

нией OA . По двум точкам и касательной можно построить окружность. При изменении расстояния l от нуля до бесконечности конец вектора $\dot{U}_0 = m_U \cdot \overline{OO'}$ будет перемещаться по дуге $AO'O_mO$. Наибольшее значение



Фиг. 143. Параллельная работа кабельной сети и воздушной линии.

нией OA . По двум точкам и касательной можно построить окружность. При изменении расстояния l от нуля до бесконечности конец вектора $\dot{U}_0 = m_U \cdot \overline{OO'}$ будет перемещаться по дуге $AO'O_mO$. Наибольшее значение

напряжение U_0 будет иметь тогда, когда его вектор будет совпадать с диаметром окружности

$$\dot{U}_0 = m_U \cdot OO'_m = m_U \cdot \frac{OA}{\cos \varphi} = \frac{U_1 \sqrt{r_0^2 + x_0^2}}{r_0} = 6 \frac{\sqrt{0,2^2 + 0,8^2}}{0,2} \text{ kV} \approx 25 \text{ kV}.$$

Так как из построения геометрического места (см. § 37) следует, что $\frac{O'A}{OO'} = 3\omega C \cdot z_0 l$, то для максимума имеем

$$\frac{O'_m A}{OO'_m} = 3\omega C z_0 l_m = \sin \psi = \frac{x_0}{z_0},$$

откуда следует, что максимум напряжения нулевая точка по отношению к земле будет иметь тогда, когда заземление произойдет на расстоянии

$$l_m = \frac{x_0}{z_0^2 - 3\omega C} = \frac{0,8}{(0,2^2 + 0,8^2) 3 \cdot 314 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \text{ cm}} = 12,5 \text{ km}.$$

Задача 33. Определить напряжения и токи в приемнике энергии, соединенном звездой с проводимостями $Y_2 = 0,1 - j0,3 \frac{1}{\Omega} = 0,316 \angle -71^\circ 30' \frac{1}{\Omega}$; $Y_1 = 0,2 - j0,15 \frac{1}{\Omega} = 0,25 \angle -36^\circ 50' \frac{1}{\Omega}$ и $Y_3 = j0,1 \frac{1}{\Omega}$, питаемом от трехфазной сети с напряжениями $U_{AB} = 125 \text{ V}$, $U_{BC} = 110 \text{ V}$ и $U_{CA} = 115 \text{ V}$.

Решение. Строим треугольник напряжений ABC (фиг. 138) и, опустив из вершины A перпендикуляр на основание CB , определяем составляющие векторов относительно системы координат образованной основанием треугольника и высотой. Высоту h определяем по площади

$$h = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

где s — половина периметра треугольника:

$$s = \frac{1}{2} (125 + 115 + 110) = 175;$$

$$h = \frac{2}{110} \sqrt{175 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 65} = 106,2; \quad \overline{OB} = \sqrt{125^2 - 106,2^2} = 65,9;$$

$$CO = 110 - 65,9 = 44,1.$$

Поэтому векторы линейных напряжений соответственно равны

$$\dot{U}_{AB} = m_U \cdot \overline{BA} = -65,9 + j106,2 \text{ V}; \quad \dot{U}_{BC} = m_U \cdot \overline{CB} = 110 \text{ V};$$

$$\dot{U}_{CA} = m_U \cdot \overline{AC} = -44,1 - j106,2 \text{ V}; \quad \dot{U}_{AC} = m_U \cdot \overline{CA} = 44,1 + j106,2 \text{ V}.$$

Определяем напряжение первой фазы

$$\dot{U}_1 = \frac{Y_2 \dot{U}_{AB} + Y_3 \dot{U}_{AC}}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{(0,1 - j0,3)(-65,9 + j106,2) + j0,1(44,1 + j106,2)}{0,1 - j0,3 + 0,2 - j0,15 + j0,1} \text{ V} =$$

$$= -36,7 + j73 \text{ V} = 81,8 \angle 116^\circ 40' \text{ V};$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 - \dot{U}_{AB} = -36,7 + j73 + 65,9 - j106,2 \text{ V} = 29,2 - j33,2 \text{ V} =$$

$$= 44,5 \angle -48^\circ 40' \text{ V};$$

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_1 + \dot{U}_{CA} = -36,7 + j73 - 44,1 - j106,2 \text{ V} = -80,8 - j33,2 \text{ V} =$$

$$= 87,4 \angle -157^\circ 40' \text{ V};$$

$$i_1 = Y_1 \dot{U}_1 = 0,25 e^{-j36^\circ 50'} \cdot 81,8 e^{j116^\circ 40'} \text{ A} = 20,45 \angle 79^\circ 50' \text{ A},$$

$$\dot{I}_2 = Y_2 \dot{U}_2 = 0,316e^{-j71^\circ 30'} \cdot 44,5e^{-j48^\circ 40'} \text{ A} = 14,1 \angle -120^\circ 10' \text{ A},$$

$$\dot{I}_3 = Y_3 \dot{U}_3 = 0,1e^{j80^\circ} \cdot 87,4e^{-j157^\circ 40'} \text{ A} = 8,74 \angle -67^\circ 40' \text{ A}.$$

На чертеже (фиг. 138) та же задача решена графически. Для решения строим диаграмму проводимостей

$$Y_1 = m_Y \cdot \overline{Oa_1}; \quad Y_2 = m_Y \cdot \overline{Oa_2}; \quad Y_3 = m_Y \cdot \overline{Oa_3}; \quad \sum Y = m_Y \cdot \overline{Oa}.$$

Затем строим по линии АВ треугольник АВМ, подобный треугольнику O_1aa_2 и по линии АС треугольник АСN, подобный треугольнику O_1aa_3 . Складываем геометрически АN и АМ. Конец равнодействующей определяет положение нулевой точки, а векторы $O'A$, $O'B$ и $O'C$ в выбранном масштабе — величину, а по направлению — фазы напряжений, действующих в отдельных ветвях звезды. На той же диаграмме вычерчены у точки O' также и векторы токов.

48. Определение очередности фаз. Опрокидывание фаз

Очередность фаз трехфазной системы может быть весьма просто определена, если соединить в звезду два активных, сопротивления (две лампочки) с проводимостями $Y_2 = Y_3 = y$, а в третью ветвь включить индуктивное сопротивление (можно и емкость), подобранные таким образом, что числовые величины их проводимостей равны между собой: $Y_1 = -jy$ (фиг. 144). При симметричной трехфазной системе ($\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0$)

$$\begin{aligned} \dot{U}_0 &= \frac{-jy\dot{U}_1 + y\dot{U}_2 + y\dot{U}_3}{-jy + y + y} = -\frac{(j+1)\dot{U}_1}{2-j} \frac{2+j}{2+j} = \\ &= -\frac{1}{5} U_1 - \frac{3}{5} jU_1. \end{aligned}$$

Напряжение же каждой из фаз звезды (Y_1 , Y_2 и Y_3), если мы систему координат выберем так, как это показано на чертеже, будет

$$\dot{U}_1' = \dot{U}_1 - \dot{U}_0 = U_1 + j\frac{1}{5} U_1 + j\frac{3}{5} U_1; \quad U_1' = 1,34U_1;$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_2' = \dot{U}_2 - \dot{U}_0 &= -\frac{1}{2} U_1 - j\frac{\sqrt{3}}{2} U_1 + \frac{1}{5} U_1 + j\frac{3}{5} U_1 = \\ &= -0,3U_1 - 0,266jU_1; \quad U_2' = 0,4U_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_3' = \dot{U}_3 - \dot{U}_0 &= -\frac{1}{2} U_1 + j\frac{\sqrt{3}}{2} U_1 + \frac{1}{5} U_1 + j\frac{3}{5} U_1 = \\ &= -0,3U_1 + 1,466jU_1; \quad U_3' = 1,5U_1. \end{aligned}$$

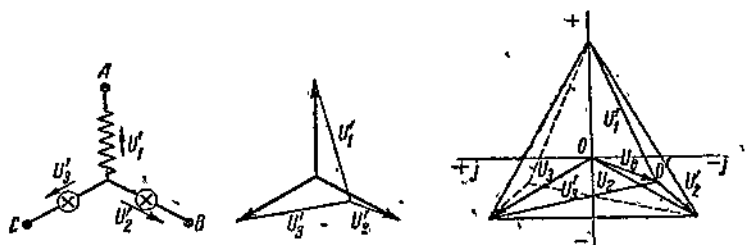
Если теперь построить на основании этих уравнений векторную диаграмму $\dot{U}_1'$, $\dot{U}_2'$ и $\dot{U}_3'$, то мы увидим, что лампочка, включенная в последующую фазу (третью), горит при напряжении, примерно в $\frac{1,5U_1}{0,4U_1} = 3,75$ раза больше, чем лампочка во второй фазе (фиг. 144).

Если же в первую фазу включить емкость, то лампочка во второй фазе будет, наоборот, гореть при большем напряжении, чем третья.

Под опрокидыванием фаз понимают изменение очередности фаз у приемника энергии, которое наблюдается, когда в одной ветви трех-

фазной системы включено реактивное сопротивление противоположного знака по сравнению с реактивным сопротивлением приемника энергии.

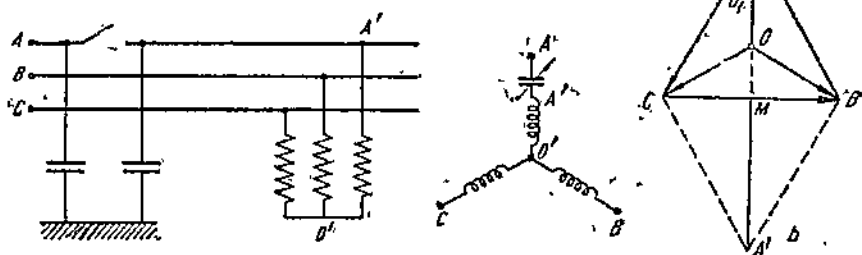
Такой случай может иметь место, когда приемник представляет большую индуктивность, например, ненагруженный асинхронный двигатель или ненагруженный трансформатор, соединенные в звезду, и когда в расщелку одной фазы включена емкость, например, если питание



Фиг. 144. Определение очередности фаз.

происходит от разветвленной кабельной сети, в которой одна жила питательного фидера имеет разрыв (фиг. 145). Пусть $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3$ — фазовые напряжения генератора, питающего сеть, ωL — индуктивность каждой из трех фаз приемника энергии и $\frac{1}{\omega C} = n\omega L$ — переменная величина реактивного сопротивления емкости

$$Y_1 = \frac{1}{j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{-j}{\omega L(1-n)}; \quad Y_2 = Y_3 = \frac{-j}{\omega L}.$$



Фиг. 145. Опрокидывание очередности фаз.

Нулевая точка у приемника будет сдвинута относительно нулевой точки генератора на величину

$$\begin{aligned} \dot{U}_0 &= \frac{Y_1 \dot{U}_1 + Y_2 \dot{U}_2 + Y_3 \dot{U}_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{\frac{-j\dot{U}_1}{\omega L(1-n)} - j\dot{U}_2 - j\dot{U}_3}{\frac{-j}{\omega L(1-n)} - j - j} = \\ &= \frac{\dot{U}_1 - (1-n)\dot{U}_1}{3-2n} = \frac{n\dot{U}_1}{3-2n}; \\ \dot{U}_{A0} &= \dot{U}_1 - \dot{U}_0 = \frac{3(1-n)\dot{U}_1}{3-2n}; \quad \dot{I}_1 = Y_1 \dot{U}_{A0} = \frac{-3j\dot{U}_1}{(3-2n)\omega L}. \end{aligned}$$

Благодаря включению в первую фазу емкости треугольник напряжения у приемника энергии будет искажаться; чтобы определить влияние емкости, мы должны определить напряжение между точками A' и A

$$\dot{U}_{A'A} = -\frac{\dot{I}_1}{j\omega C} = -\frac{I}{j} n\omega L = \frac{3n\dot{U}_1}{3-2n} = m_U AA'.$$

Последнее уравнение указывает, что на топографической диаграмме точка A' при разных значениях n будет перемещаться по линии, совпадающей с направлением $\dot{U}_1 = m_U \cdot \overline{OA}$. Когда $C = \infty$ или $n = 0$, что равноценно короткому замыканию точек A и A' , эти точки будут иметь один и тот же потенциал, и они на диаграмме совпадут. По мере уменьшения емкости, но при условии $n < \frac{3}{2}$ и $\frac{1}{\omega C} < \frac{3}{2} \omega L$ или $\omega CL > \frac{2}{3}$, точка A' будет перемещаться по вертикали вверх [$U_{A'A} > 0$]. Когда $n = \frac{3}{2}$ или $\frac{1}{\omega C} = \frac{3}{2} \omega L$, наступит резонанс напряжений в первой фазе, и теоретически точка A' переместится в бесконечность вверх. Когда $n > \frac{3}{2}$, т. е. $\frac{1}{\omega C} < \frac{3}{2} \omega L$, вектор $\dot{U}_{A'A} = m_U AA'$ будет отрицателен, и точка A' окажется ниже линии CB . При этом изменится (опрокинется) очередность фаз, т. е. если в сети очередность фаз ABC направлена по часовой стрелке, то у приемника очередность фаз будет $A'BC$ и будет направлена против часовой стрелки. Когда $n = 3$ или $\frac{1}{\omega C} = 3\omega L$, точка A' будет совпадать с вершиной правильного треугольника $A''BC$, т. е. на приемник энергии будет действовать симметричная система $A''BC$, но с обратным чередованием фаз. И наконец, когда $C = 0$, что равноценно полному отключению первой фазы, точка A' совпадет с точкой M , ибо в этом случае вторая и третья фазы окажутся соединенными последовательно без ответвлений. Таким образом геометрическим местом вершин искаженных треугольников у приемника энергии будет прямая линия от точки A вверх и от точки M вниз.

49. Преобразование треугольника в звезду и обратно

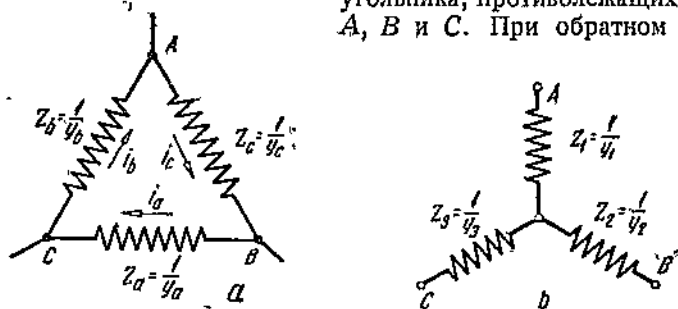
Когда приемник энергии соединен в треугольник, то при неодинаковой нагрузке фаз линейные токи получаются неравными, следовательно, и падения напряжения в отдельных проводах получаются также неодинаковыми. Поэтому приходится превращать треугольник в эквивалентную звезду и к полному сопротивлению каждой фазы эквивалентной звезды прибавлять полное сопротивление соответствующего провода линии и уже для такой звезды находить распределение токов и напряжений. Затем, вычтя из напряжения источника энергии падение напряжения в проводах, можно определить напряжения на зажимах приемника энергии и токи в отдельных его фазах.

Преобразование треугольника в эквивалентную звезду было нами уже рассмотрено в томе I („Цепь постоянного тока“). Поэтому, не

повторяя приведенных там рассуждений, напишем соответствующие соотношения, заменив сопротивления через комплексные выражения полных сопротивлений и проводимости — через комплексные выражения полных проводимостей (фиг. 146):

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}; \\ Z_2 &= \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c}; \\ Z_3 &= \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}, \end{aligned} \right\} \quad (49,1)$$

где Z_1, Z_2, Z_3 — полные сопротивления фаз звезды, примыкающих к зажимам A, B и C ; Z_a, Z_b и Z_c — полные сопротивления фаз треугольника, противолежащих зажимам A, B и C . При обратном преобра-



Фиг. 146. Преобразование треугольника в звезду.

зовании звезды в треугольник полные проводимости фаз треугольника будут находиться в следующем соотношении с полными проводимостями звезды:

$$\left. \begin{aligned} Y_a &= \frac{Y_2 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}; \\ Y_b &= \frac{Y_3 Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y_3}; \\ Y_c &= \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, \end{aligned} \right\} \quad (49,2)$$

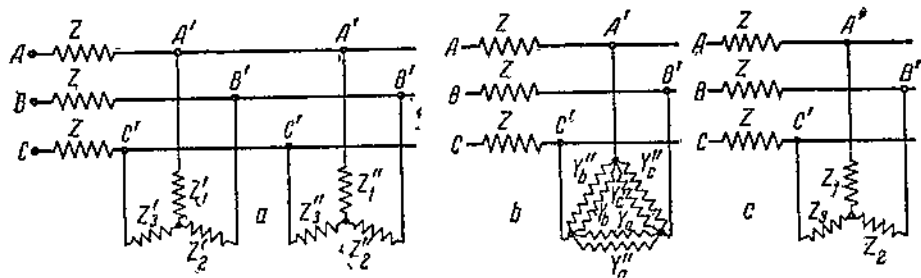
где $Y_1 = \frac{1}{Z_1}$; $Y_2 = \frac{1}{Z_2}$; $Y_3 = \frac{1}{Z_3}$ относятся к фазам звезды, а

$$Y_a = \frac{1}{Z_a}; \quad Y_b = \frac{1}{Z_b}; \quad Y_c = \frac{1}{Z_c}$$

к соответствующим фазам треугольника.

К многократной трансфигурации звезды в треугольник и обратно приходится прибегать в тех случаях, когда, например, к линии с значительным падением напряжения присоединены параллельно приемники энергии с неодинаковой нагрузкой фаз, соединенные в звезду (фиг. 147).

Для нахождения распределения напряжений и токов сначала каждую из двух звезд Z'_1, Z'_2, Z'_3 и Z''_1, Z''_2, Z''_3 трансформируют в треугольник и определяют проводимости соответствующих фаз Y'_a, Y'_b, Y'_c и Y''_a, Y''_b, Y''_c ; затем складывают проводимости одноименных сторон обоих треугольников, соединенных параллельно: $Y'_a + Y''_a = Y_a$, $Y'_b + Y''_b = Y_b$; $Y'_c + Y''_c = Y_c$.



Фиг. 147.

Заменяв две параллельные звезды одним эквивалентным треугольником, преобразовывают последний в звезду Z_1, Z_2, Z_3 и таким образом упрощают всю схему, приводя ее к одной звезде $Z + Z_1, Z + Z_2, Z + Z_3$, для которой уже нетрудно, как было показано выше, определить токи в отдельных фазах, а также и напряжения между точками A', B' и C' . Зная напряжения между началами фаз приемников энергии Z'_1, Z'_2, Z'_3 и Z''_1, Z''_2, Z''_3 , мы можем определить токи и напряжения в каждой из фаз.

Задача 34. Определить напряжения между зажимами и токи в фазах у приемника энергии, соединенного в треугольник с сопротивлениями

$$Z_a = 8 + j6 \Omega; Z_b = 4 - j8 \Omega; Z_c = 5 \Omega$$

и присоединенного через линию, сопротивление каждого провода которой равно

$$Z = 2 + j1 \Omega,$$

к симметричной трехфазной системе с напряжением 120 V (фиг. 148).

Решение. Находим модули и угловые коэффициенты сопротивления приемника и линии:

$$Z_a = 8 + j6 \Omega = 10 \angle 36^\circ 50'; Z_b = 4 - j8 \Omega = 8,95 \angle -63^\circ 30';$$

$$Z_c = 5 \Omega; Z = 2 + j1 \Omega = 2,24 \angle 26^\circ 30';$$

$$\sum Z = Z_a + Z_b + Z_c = 8 + j6 + 4 - j8 + 5 = 17 - j2 \Omega = 17,1 \angle -6^\circ 40'.$$

Эквивалентные сопротивления фаз звезды составляют

$$Z_1 = \frac{Z_b Z_c}{\sum Z} = \frac{8,95 e^{-j63^\circ 30'} \cdot 5}{17,1 e^{-j6^\circ 40'}} \Omega = 2,62 e^{-j56^\circ 50'} \Omega = 1,435 - j2,2 \Omega;$$

$$Z_2 = \frac{Z_a Z_c}{\sum Z} = \frac{10 e^{j36^\circ 50'} \cdot 5}{17,1 e^{-j6^\circ 40'}} \Omega = 2,92 e^{j43^\circ 30'} \Omega = 2,16 + j2,01 \Omega;$$

$$Z_3 = \frac{Z_a Z_b}{\sum Z} = \frac{10 e^{j36^\circ 50'} \cdot 8,95 e^{-j63^\circ 30'}}{17,1 e^{-j6^\circ 40'}} \Omega = 5,24 e^{-j26^\circ} \Omega = 4,92 - j1,79 \Omega.$$

Прибавляем к найденным сопротивлениям сопротивления подводящих проводов:

$$Z'_1 = Z_1 + Z = 1,435 - j2,2 + 2 + j1 \Omega = 3,435 - j1,2 \Omega = 3,63 \angle -19^\circ 20' \Omega;$$

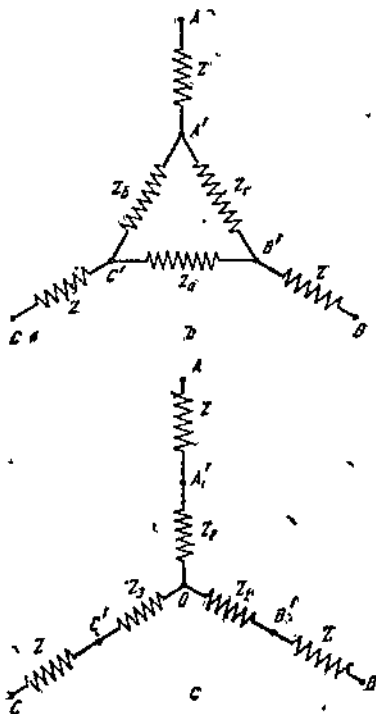
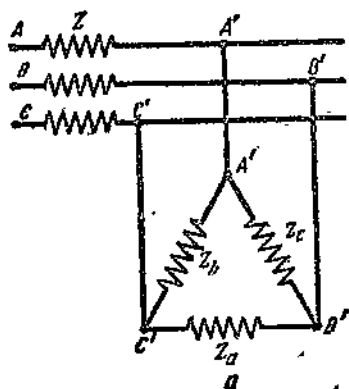
$$Z'_2 = Z_2 + Z = 2,16 + j2,01 + 2 + j1 \Omega = 4,16 + j3,01 \Omega = 5,15 \angle 35^\circ 50' \Omega;$$

$$Z'_3 = Z_3 + Z = 4,92 - j1,79 + 2 + j1 \Omega = 6,92 - j0,79 \Omega = 6,96 \angle -6^\circ 30' \Omega.$$

Соответствующие проводимости будут:

$$Y'_1 = \frac{1}{Z'_1} = \frac{1}{3,63e^{-j19^\circ 20'}} \cdot \frac{1}{\Omega} = 0,276 \angle 19^\circ 20' \frac{1}{\Omega} = 0,26 + j0,091 \frac{1}{\Omega};$$

$$Y'_2 = \frac{1}{Z'_2} = \frac{1}{5,15e^{j35^\circ 50'}} \cdot \frac{1}{\Omega} = 0,194 \angle -35^\circ 50' \frac{1}{\Omega} = 0,157 - j0,1125 \frac{1}{\Omega};$$



Фиг. 148. К задаче 34.

$$Y'_3 = \frac{1}{Z'_3} = \frac{1}{6,96e^{-j6^\circ 30'}} \cdot \frac{1}{\Omega} = 0,144 \angle 6^\circ 30' \frac{1}{\Omega} = 0,143 + j0,016 \frac{1}{\Omega};$$

$$\sum Y' = Y'_1 + Y'_2 + Y'_3 = 0,26 + j0,091 + 0,157 - j0,1125 + 0,143 + j0,016 \frac{1}{\Omega} = 0,56 - j0,0055 \frac{1}{\Omega} = 0,56 \angle -0^\circ 40' \frac{1}{\Omega}.$$

Выражаем в комплексной форме линейные напряжения и определяем фазовые напряжения полной эквивалентной звезды:

$$\dot{U}_{BC} = 120 \angle 0^\circ \text{ V}; \quad \dot{U}_{CA} = 120e^{-j120^\circ} \text{ V} = -60 - j104 \text{ V};$$

$$\dot{U}_{AB} = 120e^{j120^\circ} \text{ V} = -60 + j104 \text{ V};$$

$$\dot{U}_i = \frac{Y'_2 \dot{U}_{AB} + Y'_3 \dot{U}_{AC}}{\sum Y'} =$$

$$= \frac{(0,157 - j0,1125)(-60 + j104) + (0,143 + j0,016)(60 + j104)}{0,56 - j0,0055} \text{ V} = 16 + j70,5 \text{ V} = 72 \angle 77^\circ 10' \text{ V};$$

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_{CA} + \dot{U}_1 = -60 - j104 + 16 + j70,5 \text{ В} = -44 - j33,5 \text{ В} = 55,5 \angle -142^\circ 40' \text{ В};$$

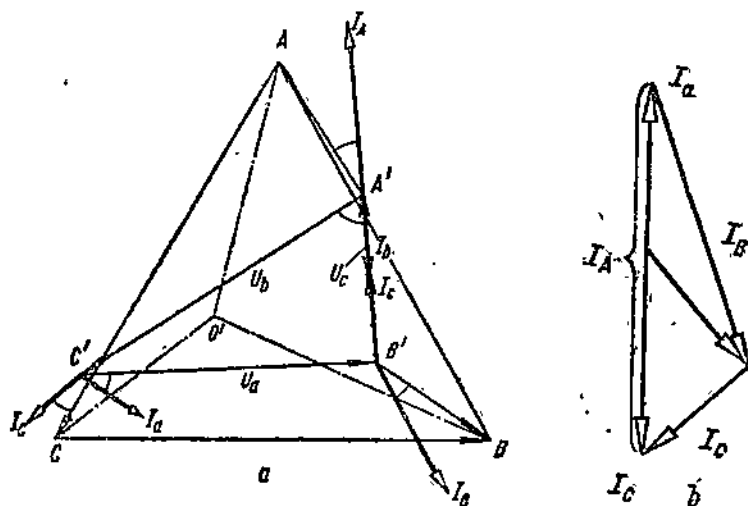
$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 - \dot{U}_{AB} = 16 + j70,5 + 60 - j104 \text{ В} = 76 - j33,5 \text{ В} = 83,2 \angle -24^\circ \text{ В}.$$

Находим линейные токи:

$$\dot{I}_A = Y_1 \dot{U}_1 = 0,276 e^{j19^\circ 20'} \cdot 72 e^{j77^\circ 10'} \text{ А} = 19,8 \angle 96^\circ 30' \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = Y_2 \dot{U}_2 = 0,194 e^{-j35^\circ 50'} \cdot 83,2 e^{-j24^\circ} \text{ А} = 16,2 \angle -59^\circ 50' \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = Y_3 \dot{U}_3 = 0,144 e^{j6^\circ 30'} \cdot 55,5 e^{-j142^\circ 40'} \text{ А} = 8 \angle -136^\circ 10' \text{ А}.$$



Фиг. 149.

Падения напряжения в проводах будут:

$$\dot{U}_A = Z \dot{I}_A = 2,24 e^{j26^\circ 30'} \cdot 19,8 e^{j96^\circ 30'} \text{ В} = 44,3 \angle 123^\circ \text{ В} = -24,2 + j37,2 \text{ В};$$

$$\dot{U}_B = Z \dot{I}_B = 2,24 e^{j26^\circ 30'} \cdot 16,2 e^{-j59^\circ 50'} \text{ В} = 36,3 \angle -33^\circ 20' \text{ В} = 30,4 - j20,1 \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = Z \dot{I}_C = 2,24 e^{j26^\circ 30'} \cdot 8 e^{j136^\circ 10'} \text{ В} = 17,92 \angle -109^\circ 40' \text{ В} = -6,4 - j16,8 \text{ В}.$$

Отсюда напряжения между зажимами приемника энергии определяются как

$$\dot{U}_a = \dot{U}_{B'C''} = \dot{U}_{BC} - \dot{U}_B + \dot{U}_C = 120 - 30,4 + j20,1 - 6,4 - j16,8 \text{ В} = 83,2 + j3,3 \text{ В} = 84 \angle 2^\circ 30' \text{ В};$$

$$\dot{U}_b = \dot{U}_{C'A'} = \dot{U}_{CA} - \dot{U}_C + \dot{U}_A = -60 - j104 + 6,14 + j16,8 - 24,2 + j37,2 \text{ В} = -78,06 - j50 \text{ В} = 92,5 \angle -147^\circ 20' \text{ В};$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_{A'B'} = \dot{U}_{AB} - \dot{U}_A + \dot{U}_B = -60 + j104 + 24,2 - j37,2 + 30,4 - j20,1 \text{ В} = -5,4 + j46,7 \text{ В} = 46,9 \angle 95^\circ 30' \text{ В}.$$

Искомые токи в фазах приемника энергии выражаются через

$$i_a = \frac{\dot{U}_a}{Z_a} = \frac{84e^{j2^\circ 30'}}{10e^{j36^\circ 50'}} \text{ А} = 8,4 \angle -34^\circ 20' \text{ А};$$

$$i_b = \frac{\dot{U}_b}{Z_b} = \frac{92,5e^{-j147^\circ 20'}}{8,95e^{-j63^\circ 30'}} \text{ А} = 10,4 \angle -83^\circ 50' \text{ А};$$

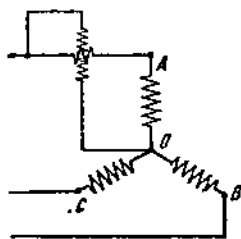
$$i_c = \frac{\dot{U}_c}{Z_c} = \frac{46,9e^{j95^\circ 30'}}{5} \text{ А} = 9,4 \angle 95^\circ 30' \text{ А}.$$

На фиг. 149 построены в масштабе векторные диаграммы напряжений и токов.

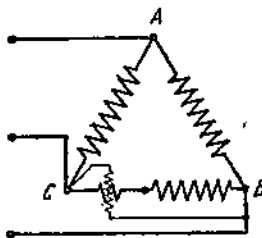
50. Измерение мощности трехфазного тока

Для измерения мощности многофазной системы в общем случае необходимо измерить мощность каждой фазы, а затем сложить мощности отдельных фаз. При одинаковой нагрузке симметричной многофазной системы достаточно измерить мощность одной фазы и полученный результат умножить на число фаз.

При одинаковой нагрузке симметричной трехфазной системы мощность одной фазы может быть измерена в случае звезды путем вклю-



Фиг. 150. Измерение мощности одной фазы звезды с доступным нулем при одинаковой нагрузке.

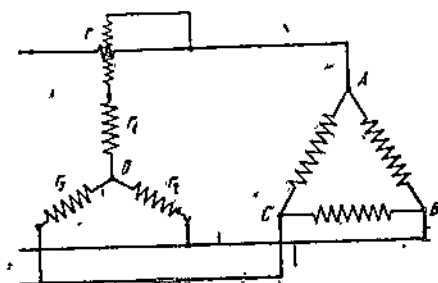


Фиг. 151. Измерение мощности одной фазы треугольника при одинаковой нагрузке.

чения толстой обмотки ваттметра в линию, а тонкой — между линией и нулевой точкой (фиг. 150), а при соединении треугольником — включением толстой обмотки ваттметра в разрез фазы, а тонкой его обмотки — к концам соответствующей фазы (фиг. 151).

Если нулевая точка недоступна или треугольник не может быть разъединен, то при одинаковой нагрузке фаз мощность может быть

измерена при помощи одного ваттметра. Для этого нужно создать искусственную нулевую точку при помощи трех сопротивлений r_1 , r_2 , и r_3 , как это показано на фиг. 152. Если r — сопротивление тонкой обмотки ваттметра, то при условии, что $r + r_1 = r_2 = r_3$, искусственная нулевая точка совпадает с центром правильного треугольника напряжений ABC , и показания ваттметра равны одной трети общей мощности. Если же $r_1 = r_2 = r_3$, то нулевая точка будет смещена, и фазовое напряжение между A и O составит



Фиг. 152. Измерение мощности одной фазы треугольника при одинаковой нагрузке при помощи искусственной нулевой точки.

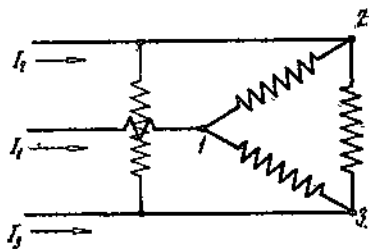
$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_{AB}Y_2 + \dot{U}_{AC}Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{(\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{AC})\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r+r_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1}} = \frac{3\dot{U}_0(r_1+r)}{3(r_1+r)-r},$$

где

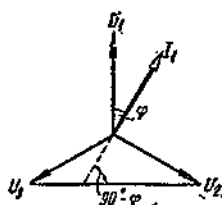
$$\begin{aligned}\dot{U}_0 &= \frac{\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{AC}}{3} = \frac{m_U \cdot \overline{BA} + m_U \overline{CA}}{3} = \\ &= \frac{U}{3} \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{U}{3} \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = j\frac{U}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

есть фазовое напряжение симметричной звезды. Поэтому, если показание ваттметра равно P' , то действительная мощность будет не $3P'$, а меньше в отношении напряжений U_0 и U_1 :

$$3P = 3P' \cdot \frac{\dot{U}_0}{\dot{U}_1} = 3P' \cdot \frac{3(r_1+r)-r}{3(r_1+r)} = 3P' \left[1 - \frac{r}{3(r_1+r)} \right].$$



Фиг. 153.



Реактивная мощность трехфазной системы при одинаковой нагрузке фаз может быть измерена одним ваттметром, если толстую обмотку ваттметра включить в один провод линии, а концы тонкой обмотки соединить с двумя другими проводами (фиг. 153), показания ваттметра будут равны

$$P_r = \sqrt{3} UI \sin \varphi.$$

При неодинаковой нагрузке трех фаз можно включить три ваттметра — по одному в каждую фазу, соединив вторые концы тонких обмоток или с нулевой точкой, если она имеется и доступна, или с искусственной нулевой точкой (фиг. 154). Если мы обозначим через u_1, u_2 и u_3 мгновенные фазовые напряжения у приемника энергии, а через u_0 — напряжение между искусственной нулевой точкой и нулевой точкой приемника энергии, то мгновенные мощности, учитываемые ваттметрами, выразятся через

$$p'_1 = u'_1 i_1 = (u_1 - u_0) i_1 = p_1 - u_0 i_1;$$

$$p'_2 = u'_2 i_2 = (u_2 - u_0) i_2 = p_2 - u_0 i_2;$$

$$p'_3 = u'_3 i_3 = (u_3 - u_0) i_3 = p_3 - u_0 i_3.$$

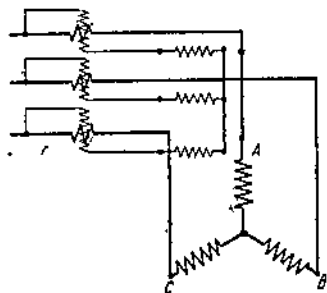
Так как в приемнике энергии

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0,$$

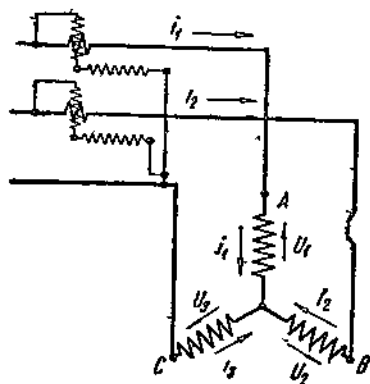
то

$$p'_1 + p'_2 + p'_3 = p_1 + p_2 + p_3$$

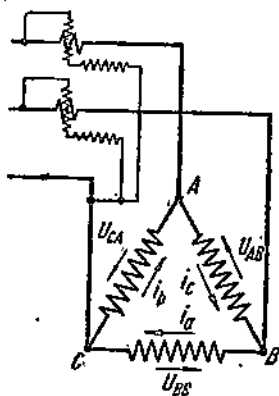
(сумма показаний ваттметров) будет правильно учитывать мощность приемника энергии, хотя измеряемая каждым ваттметром мощность и не будет равна мощности соответствующей фазы. Включенные ваттметры будут правильно учитывать мощность и тогда, когда приемник энергии соединен в треугольник.



Фиг. 154. Измерение мощности неодинаковой нагрузки тремя ваттметрами с искусственной нулевой точкой.



Фиг. 155. Измерение мощности по схеме Арона при соединении звездой.



Фиг. 156. Измерение мощности по схеме Арона при соединении треугольником.

Обыкновенно для измерения мощности трехфазного тока при неодинаковой нагрузке пользуются двумя ваттметрами, включенными по схеме Арона, т. е. таким образом, что толстые обмотки двух ваттметров включаются в два провода линий, а тонкие — между соответствующим проводом и третьим проводом (фиг. 155 и 156).

Мощность, учитываемая в какой-нибудь момент времени первым ваттметром, при соединении приемника энергии в звезду (фиг. 155) равна

$$u_{AG}i_A = u_{AC}i_1 = (u_1 - u_3)i_1,$$

а вторым ваттметром

$$u_{BG}i_B = u_{BC}i_2 = (u_2 - u_3)i_2.$$

Сумма мгновенных мощностей, учитываемая обоими ваттметрами, ввиду того что $i_1 + i_2 + i_3 = 0$,

$(u_1 - u_3)i_1 + (u_2 - u_3)i_2 = u_1i_1 + u_2i_2 - u_3(i_1 + i_2) = u_1i_1 + u_2i_2 + u_3i_3$, равна мгновенной мощности всех трех фаз независимо от того, будут ли фазы одинаково нагружены или нет.

То же самое мы имеем в случае соединения приемника энергии треугольником (фиг. 156). На долю первого ваттметра приходится

$$u_{AG}i_A = -u_{CA}(i_c - i_b) = u_{CA}i_b - u_{CA}i_c,$$

а на долю второго

$$u_{BG}i_B = u_{BC}(i_a - i_c) = u_{BC}i_a - u_{BC}i_c.$$

Так как для замкнутого контура

$$u_{AB} + u_{BC} + u_{CA} = 0,$$

то мы получаем, что мощность, измеряемая обоими ваттметрами,

$$\begin{aligned} u_{AG}i_A + u_{BG}i_B &= u_{BC}i_a + u_{CA}i_b - (u_{BC} + u_{CA})i_c = \\ &= u_{BG}i_a + u_{CA}i_b + u_{AB}i_c, \end{aligned}$$

равна мощности всей системы независимо от того, как нагружены фазы.

Таким образом два ваттметра, соединенных по схеме Арона, измеряют всю мощность трехфазной системы независимо от схемы соединения приемника энергии и от нагрузок в его фазах.

Правильность схемы Арона вытекает также из того соображения, что, так как сумма токов в трех проводах равна нулю, мы два провода можем рассматривать как прямые провода, а третий — как общий обратный провод, поэтому два ваттметра должны учитывать общую мощность.

Показание первого ваттметра будет определять мощность

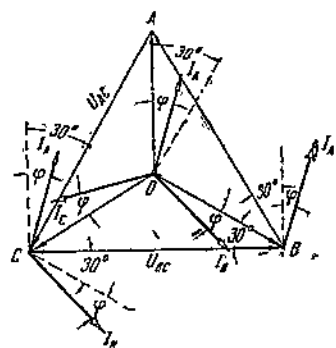
$$P_1 = U_{AC}I_A \cos(\dot{U}_{AG}, \dot{I}_A),$$

а второго

$$P_2 = U_{BC}I_B \cos(\dot{U}_{BG}, \dot{I}_B).$$

При одинаковой нагрузке всех трех фаз [показания ваттметров, как видно из фиг. 157, выразятся через

$$P_1 = U_{AG}I_A \cos(\varphi - 30^\circ) = UI \cos(\varphi - 30^\circ)$$



Фиг. 157. Диаграмма токов и напряжений в ваттметрах, включенных по схеме Арона при одинаковой нагрузке.

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos(\varphi + 30^\circ) = UI \cos(\varphi + 30^\circ).$$

Если мы сложим и вычтем показания ваттметров, то получим

$$P = P_1 + P_2 = UI [\cos(\varphi - 30^\circ) + \cos(\varphi + 30^\circ)] = UI \cdot 2 \cos \varphi \cos 30^\circ = \sqrt{3} UI \cos \varphi;$$

$$P_1 - P_2 = UI [\cos(\varphi - 30^\circ) - \cos(\varphi + 30^\circ)] = UI \cdot 2 \sin \varphi \cdot \sin 30^\circ = UI \sin \varphi.$$

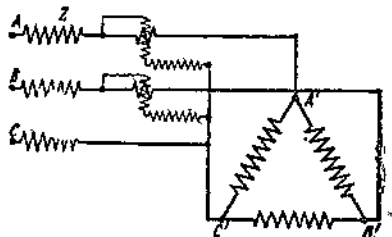
Разделив второе уравнение на первое, мы можем определить тангенс угла сдвига

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}.$$

Последняя формула для определения сдвига фаз применима лишь при синусоидальных токах и при полной тождественности всех трех фаз. При неодинаковой нагрузке и при наличии высших гармоник этот метод определения сдвига фаз дает неправильные результаты.

Как видно из вышеприведенных уравнений, показания обоих ваттметров при одинаковой нагрузке будут одинаковы лишь в том случае, когда сдвиг между напряжением и током в фазах равен нулю, $\varphi = 0$, т. е. при чисто активной нагрузке.

В противном случае даже при одинаковой нагрузке всех трех фаз один ваттметр будет показывать больше другого. При индуктивной нагрузке, когда $\varphi > 60^\circ$, угол между $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{I}_B$ будет больше 90° , и первый ваттметр даст отрицательное показание. Так как стрелки ваттметров дают обыкновенно отклонение только в одну сторону, то тонкую обмотку одного ваттметра придется переключать, и в этом случае для получения общей мощности следует брать не сумму, а разность показаний обоих ваттметров.



Фиг. 158. К задаче 35.

Разложение несимметричной трехфазной системы на две симметричных, прямой и обратной последовательности, будет рассмотрено в III томе.

Задача 35. Определить показания ваттметров, включенных у приемника энергии, предыдущей задачи по схеме фиг. 158.

Решение.

$$P_1 = U_{A'C'} I_A \cos(\dot{U}_{A'C'} \dot{I}_A) = 92,5 \cdot 19,8 \cos(32^\circ 40' - 96^\circ 30') \text{ W} = 805 \text{ W};$$

$$P_2 = U_{B'C'} I_B \cos(\dot{U}_{B'C'} \dot{I}_B) = 84 \cdot 16,2 \cos(2^\circ 30' + 59^\circ 50') \text{ W} = 610 \text{ W};$$

$$P = P_1 + P_2 = 805 + 610 \text{ W} = 1415 \text{ W}.$$

Проверяем правильность результата:

$$\dot{P} = r_a I_a^2 + r_b I_b^2 + r_c I_c^2 = 8 \cdot 8,4^2 + 4 \cdot 10,4^2 + 5 \cdot 9,4^2 \text{ W} = 1415 \text{ W}.$$

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ

51. Неравномерное распределение плотности тока

При прохождении переменного тока через проводник, особенно при высоких частотах и больших сечениях, ток распределяется неодинаково по поперечному сечению проводника вследствие того, что внутри проводника возникает переменное магнитное поле, которое наводит в самом проводнике, в разных частях его сечения, неодинаковые противо-э. д. с. Под действием этих неодинаковых противо-э. д. с. или, другими словами, под действием внутреннего (переменного) магнитного поля ток не распределяется равномерно по поперечному сечению проводника, а частично вытесняется к поверхности проводника. Вследствие этого плотность тока $\delta = \frac{di}{dS}$ неодинакова для разных точек сечения, и отсту-

пление от среднего значения зависит от положения данной точки по отношению ко всему поперечному сечению проводника¹.

При больших сечениях и при больших частотах плотность тока убывает к середине сечения проводника: весь ток протекает, главным образом, по некоторому, сравнительно тонкому, поверхностному слою. Отсюда это явление и получило свое название поверхностного или кожного эффекта или, если употреблять английский термин, — скин-эффекта.

Рассмотрим это явление при прохождении переменного тока через (бесконечно) длинный цилиндрический проводник. Пусть обратный провод, замыкающий цепь, удален настолько, что он не оказывает влияния на распределение тока в рассматриваемом длинном проводнике. Падение напряжения на единицу длины проводника как вдоль оси проводника, так и вдоль любой линии, проведенной параллельно оси проводника, будет одинаково по всей длине, и линии тока в проводнике будут направлены параллельно оси проводника.

Благодаря симметрии индукционные линии магнитного поля, образующегося внутри проводника, будут направлены по концентрическим окружностям с центрами, лежащими на оси проводника, и плотность тока в точках сечения проводника, равно удаленных от оси, будет одинакова по величине и фазе.

Разобьем проводник на ряд нитей или трубок, параллельных оси. Падение напряжения на единицу длины, одинаковое для всех трубок, составляется из активного и реактивного падений напряжений. Так как трубки, лежащие ближе к оси, охватываются большим магнитным потоком, чем более удаленные, то индуктивное падение напряжения ближе к центру сечения будет большим и вызовет уменьшение плотности тока. Чем больше сечение провода, чем больше проницаемость материала проводника и чем больше частота, тем резче должно сказываться различие в значениях индуктивных падений напряжения в трубках, лежа-

¹ В этой главе мы обозначаем плотность тока через δ , а не через j , для того чтобы избежать совпадения обозначения плотности тока с обозначением мнимой единицы.

щих ближе к оси проводника, и в трубках, более удаленных от оси, а следовательно, и плотность тока должна увеличиваться в точках, лежащих ближе к поверхности проводника.

Кроме неравномерного распределения плотности тока плотности эти в разных точках сечения будут сдвинуты в своих фазах.

В результате такого неравномерного распределения потери на джоулево тепло будут больше, чем при том же значении тока и равномерном распределении его по сечению. Для постоянного тока потери на джоулево тепло определяются через произведение квадрата тока на сопротивление: $r_{пост} I_{пост}^2 = \frac{\gamma l}{S} I_{пост}^2$.

При прохождении через проводник переменного тока, эффективное значение которого равно той же величине: $I_{пер} = I_{пост}$, потери в том же проводнике будут больше. Выражая эти потери через произведение квадрата тока на активное сопротивление, $r_{акт} I_{пер}^2$, мы получим, что в результате вытеснения тока к поверхности активное сопротивление увеличится по сравнению со значением сопротивления при постоянном токе.

Это увеличение сопротивления при малых частотах может быть выражено через следующие приближенные формулы:

$$\frac{r_{акт}}{r_{пост}} = 1 + \frac{\pi^4 \mu_r^2 f^2 d^4}{48 \varrho^2 \cdot 10^{-8}},$$

где μ_r — относительная магнитная проницаемость, f — частота в герцах; $\varrho = \frac{1}{\gamma}$ — удельное сопротивление проводника в $\Omega \text{ см}$; d — диаметр сечения в сантиметрах, а для больших частот при тех же обозначениях

$$\frac{r_{акт}}{r_{пост}} = \frac{\pi d}{2} \sqrt{\frac{\mu_r f}{\varrho \cdot 10^{-8}}}.$$

Более точные формулы приводятся в следующих параграфах.

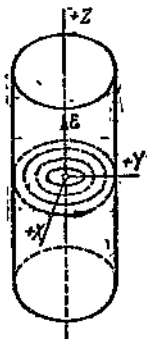
52. Дифференциальные уравнения распределения тока в цилиндрических проводниках

Для составления дифференциальных уравнений распределения тока в цилиндрических проводниках выберем цилиндрическую систему координат с осью Z , совпадающей с осью проводника (фиг. 159).

Плотность тока δ в разных точках сечения проводника будет совпадать по направлению с осью проводника.

По соображениям симметрии токи в точках, отстоящих на одинаковом расстоянии от оси провода, будут иметь одинаковые амплитуды и одинаковые фазы; индукционные же линии будут представляться концентрическими окружностями; вектор напряженности магнитного поля H , определяющий значение и направление напряженности магнитного поля в рассматриваемое мгновение, будет лежать в плоскости сечения проводника и будет перпендикулярен к радиусу, соединяющему рассматриваемую точку с центром сечения (фиг. 160).

Мы предполагаем, что магнитная проницаемость среды проводника постоянна: $\mu = \mu_r \mu_0 = \text{const}$, и поэтому магнитная индукция будет меняться по такому же закону, как и напряженность поля: $B = \mu H$, и будет представлять собой, так же как и H , функцию времени t и расстояния R от оси Z .



Фиг. 159.
Направление
магнитного
поля внутри
проводника.

Для того чтобы определить зависимость между плотностью тока и напряженностью магнитного поля, выберем в сечении проводника бесконечно малый контур $abcd$, ограниченный двумя дугами bc и da и двумя отрезками радиусов ab и cd (фиг. 160), и возьмем линейный интеграл напряженности поля вдоль этого контура. Этот интеграл должен равняться сумме токов, охватываемых этим контуром:

$$H_{ab} \cdot ab \cdot \cos 90^\circ + H_{bc} \cdot bc \cdot \cos 0^\circ + H_{cd} \cdot cd \cdot \cos 270^\circ + H_{da} \cdot da \cdot \cos 180^\circ = \delta S_{abcd},$$

где S_{abcd} — площадь, ограниченная контуром $abcd$.

Для бесконечно малого контура мы можем написать

$$ad = R d\varphi; ab = dc = dR; bc = (R + dR) d\varphi;$$

$$S_{abcd} = \frac{R d\varphi + (R + dR) d\varphi}{2} dR \approx R d\varphi dR.$$

Кроме того, если

$$H_{ad} = H,$$

то

$$H_{bc} = H + dH.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \oint H d\mathbf{l} &= \oint H d\mathbf{l} \cos(H, d\mathbf{l}) = (H + dH)(R + dR) d\varphi - HR d\varphi = \\ &= HR d\varphi + dHR d\varphi + H dR d\varphi + dH dR d\varphi - HR d\varphi = \\ &= dHR d\varphi + H dR d\varphi + dH dR d\varphi = \delta S_{abcd}. \end{aligned}$$

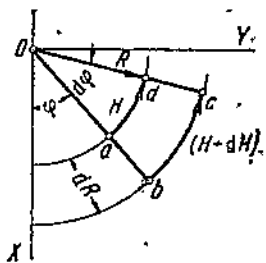
Отбрасывая бесконечно малую третьего порядка, мы получаем, что

$$\oint H d\mathbf{l} = dHR d\varphi + H dR d\varphi = \delta R d\varphi dR.$$

Деля обе части на $R d\varphi dR$, мы получаем

$$\frac{dH}{dR} + \frac{H}{R} = \delta. \quad (52,1)$$

Затем проведем плоскость через ось проводника и возьмем в этой плоскости бесконечно малый прямоугольный контур со сторонами dz , параллельными оси Z , и dR , перпендикулярными оси Z (фиг. 161). В этом контуре наводится э. д. с.



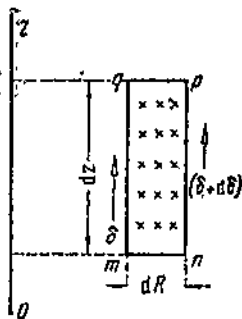
Фиг. 160. Сечение проводника.

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} (B dz dR) = -\frac{dB}{dt} dz dR.$$

Эта э. д. с. при нарастании B направлена против часовой стрелки и должна равняться сумме падений напряжений вдоль периметра этого

контура. Пусть проводимость проводника равна $\gamma = \frac{1}{\rho}$. Активное падение напряжения на единицу длины параллельно оси Z равно плотности тока, деленной на проводимость $\frac{\delta}{\gamma} = \delta \rho$; на протяжении dz падение напряжения равно $\frac{\delta}{\gamma} dz$. Все точки как линии mn , так и линии pq

имеют одинаковые потенциалы, а потому вдоль этих участков нет падения напряжения. Кроме активного падения напряжения мы должны еще учесть разность потенциалов, создаваемую внешним напряжением между сечениями pq и mn , но так как эти разности потенциалов на протяжении участков pr и mq равны, то при обходе контура $mqrn$ мы один раз (по линии mq) пройдем по направлению напряженности внешнего электрического поля, а другой раз — против направления этого поля (по линии rn), поэтому в общей сумме падений напряжения вдоль контура $mqrn$ эти слагающие взаимно уравниваются; э. д. с., наводимая собственным магнитным потоком в контуре $mqrn$, должна равняться разности активных падений напряжения на участках mq и rn . Именно благодаря возникновению этой э. д. с. и имеет место неодинаковая плотность тока в точках m и n . Пусть плотность тока в точке m (она направлена по линии mq) равна δ ; обозначим плотность тока в точке n через $\delta + d\delta$, тогда мы можем написать, что



Фиг. 161. Разрез проводника по его оси.

$$\frac{\delta}{\gamma} dz - \frac{\delta + d\delta}{\gamma} dz = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB}{dt} dz dR = -\mu \frac{dH}{dt} dz dR,$$

или

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d\delta}{dR} = \mu \frac{dH}{dt}, \quad \text{или} \quad \frac{d\delta}{dR} = \gamma \mu \frac{dH}{dt}. \quad (52,2)$$

Выведенные два уравнения (52,1) и (52,2) представляют собой нечто иное, как уравнения Максвелла в цилиндрических координатах в применении к нашему случаю.

53. Распределение плотности тока в цилиндрических проводах

Если электрическая проводимость γ и магнитная проницаемость μ остаются постоянными, то при синусоидальном внешнем напряжении $u = U_m e^{j\omega t}$ все меняющиеся во времени величины будут также совершать гармонические колебания с тем же периодом, но они могут не совпадать по фазе с внешним напряжением.

Поэтому плотность тока δ и напряженность поля H , которые являются функциями координаты R и времени t , могут быть представлены в следующем виде:

$$\delta = \delta_{Rm} e^{j(\omega t + \varphi)} = \delta_{Rm} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \hat{\delta}_{Rm} e^{j\omega t}, \quad (53,1)$$

$$\dot{H} = H_{Rm} e^{j(\omega t + \psi)} = H_{Rm} e^{j\psi} e^{j\omega t} = \dot{H}_{Rm} e^{j\omega t}, \quad (53,2)$$

где $\dot{\delta}_{Rm}$ и $\dot{H}_{Rm}$ — амплитуды плотности тока и напряженности поля являются лишь функциями расстояния R и представляют собой амплитуды колебания плотности тока и напряженности магнитного поля, а φ и ψ , которые также являются функциями лишь от R , указывают сдвиг фаз между колебаниями плотности тока и напряженности магнитного поля, с одной стороны, и колебаниями внешнего напряжения — с другой.

Если мы подставим выражения для δ и H в дифференциальные уравнения (52,1) и (52,2), то получим два уравнения:

$$\frac{d\dot{H}_{Rm}}{dR} e^{j\omega t} + \frac{1}{R} \dot{H}_{Rm} e^{j\omega t} = \dot{\delta}_{Rm} e^{j\omega t},$$

или

$$\frac{d\dot{H}_{Rm}}{dR} + \frac{1}{R} \dot{H}_{Rm} = \dot{\delta}_{Rm}, \quad (53,3)$$

$$\mu j\omega \dot{H}_{Rm} e^{j\omega t} = \frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{\delta}_{Rm}}{dR} e^{j\omega t},$$

или

$$\dot{H}_{Rm} = \frac{1}{j\omega\gamma\mu} \frac{d\dot{\delta}_{Rm}}{dR}, \quad (53,4)$$

сократив оба уравнения на $e^{j\omega t}$.

Подставив $\dot{H}_{Rm}$ из уравнения (53,4) в уравнение (53,3), мы получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{1}{j\omega\gamma\mu} \frac{d^2\dot{\delta}_{Rm}}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{1}{j\omega\gamma\mu} \frac{d\dot{\delta}_{Rm}}{dR} = \dot{\delta}_{Rm}, \quad (53,5)$$

которое после введения обозначений

$$\omega\gamma\mu = k^2, \quad kR = x \quad \text{и} \quad \dot{\delta}_{Rm} = y$$

может быть приведено к общему виду бесселевых уравнений нулевого порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - jy = 0 \quad (53,6)$$

(и притом первого рода, поскольку для $kR = x = 0$, т. е. в центре сечения плотность тока $y = \dot{\delta}$ равна конечной, а не бесконечно большой величине).

Эти уравнения могут быть решены при помощи рядов, содержащих лишь четные степени (так как замена x через $-x$ не должна влиять на знак y):

$$\begin{aligned} y = \dot{\delta}_{Rm} &= A_0 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 \dots; \\ \frac{dy}{dx} &= 2A_2 x + 4A_4 x^3 + 6A_6 x^5 \dots; \\ \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} &= 2A_2 + 4A_4 x^2 + 6A_6 x^4 \dots; \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 2A_2 + 3 \cdot 4 \cdot A_4 x^2 + 5 \cdot 6A_6 x^4 \dots \end{aligned}$$

Складывая соответствующие ряды

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - jy \cong 2^2 A_2 - jA_0 + (4A_4 - jA_2)x^2 + (6^2 A_6 - jA_4)x^4 \dots = 0$$

и учитывая, что это уравнение при всех значениях x должно равняться нулю, а следовательно, и все коэффициенты при разных степенях x должны равняться нулю, мы можем определить связь между отдельными коэффициентами

$$A_2 = \frac{j}{2^2} A_0; \quad A_4 = \frac{j}{4^2} A_2 = -\frac{1}{2^4 2^2} A_0;$$

$$A_6 = \frac{j}{6^2} A_4 = \frac{-j}{2^6 3^2} A_0 \dots$$

и, зная коэффициенты, написать выражение искомой функции

$$y = \delta_{Rm} = A_0 \left[1 - \frac{x^4}{2^4 \cdot 2^2} + \frac{x^8}{2^8 \cdot 4^2} \dots + j \left(\frac{x^2}{2^2 \cdot 1^2} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 3^2} + \frac{x^{10}}{2^{10} \cdot 5^2} \right) \right] =$$

$$= A_0 \left[1 - \frac{(V-jx)^2}{2^2 \cdot 1^2} + \frac{(V-jx)^4}{2^4 \cdot 2^2} - \frac{(V-jx)^6}{2^6 \cdot 3^2} \dots \right] = A_0 J_0(V-jx), \quad (53,7)$$

т. е. в виде постоянной величины A_0 , умноженной на комплекс, состоящий из действительной и мнимой частей, которые с любой точностью могут быть подсчитаны для всякого значения x . Комплексная функция, стоящая в прямоугольных скобках, носит название бесселевой функции нулевого порядка. Она может быть выражена еще в таком виде:

$$J_0(V-jx) = b_0 e^{-j\beta_0}. \quad (53,8)$$

Существуют таблицы с вычисленными значениями бесселевых функций, которые дают значения комплексов или в виде действительной и мнимой частей или же в виде модулей и поворотных углов. Таблица на стр. 186 дает значения модулей и поворотных углов для значений $x = kR$ от $x = 0$ до $x = 10$.

Если мы x приравняем нулю: $x = kR = 0$, что соответствует точке в центре сечения ($R = 0$), то $y = \delta_{Rm} = A_0$, т. е. коэффициент A_0 в нашем случае представляет собой плотность тока в центре сечения. Таким образом плотность тока вдоль радиуса R будет распределяться согласно уравнению

$$\delta_{Rm} = \delta_{0m} J_0(V-jkR). \quad (53,9)$$

Зная распределение плотности тока, мы на основании уравнения (53,4) можем определить и распределение напряженности магнитного поля

$$\dot{H}_{Rm} = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{d\delta_{Rm}}{dR} = -\frac{1}{(V-j)^2 k^2} \frac{d\delta_{Rm}}{dR} =$$

$$= -\frac{\delta_{0m}}{V-jk} \frac{dJ_0(V-jkR)}{d(V-jkR)} = \frac{\delta_{0m} e^{j\frac{\pi}{4}}}{k} J_1(V-jkR). \quad (53,10)$$

$$\left[V-j = \left(e^{-j\frac{\pi}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = e^{-j\frac{\pi}{4}} \right].$$

Модули и аргументы бесселевых функций нулевого и первого порядков:

$$J_0(z) = b_0 e^{-j\beta_0}, \quad J_1(z) = b_1 e^{-j\beta_1}, \quad \text{где } z = \sqrt{-j} kR$$

и производные величины

$$\frac{kR}{2} \frac{b_0}{b_1} \text{ и } \beta_1 - 45^\circ - \beta_0$$

$x = kR$	b_0	β_0°	b_1	β_1°	$\frac{kR}{2} \frac{b_0}{b_1}$	$\beta_1 - 45^\circ - \beta_0$
0,0	1,0000	—	0,0000	45,000	1,0000	0,000
0,1	1,0000	—	0,0500	44,931	1,0000	0,091
0,2	1,0001	—	0,1000	44,714	1,0001	0,281
0,3	1,0002	—	0,1500	44,350	1,0001	0,633
0,4	1,0003	—	0,2000	43,854	1,0003	1,137
0,5	1,0010	—	0,2500	43,213	1,0006	1,830
0,6	1,0020	—	0,3001	42,422	1,0017	2,572
0,7	1,0037	—	0,3502	41,489	1,0032	3,489
0,8	1,0063	—	0,4010	40,358	1,0054	4,508
0,9	1,0102	—	0,4508	39,207	1,0084	5,757
1,0	1,0155	—	0,5014	37,837	1,0128	7,054
1,1	1,0226	—	0,5508	36,343	1,0188	8,510
1,2	1,0319	—	0,6032	34,706	1,0265	10,039
1,3	1,0436	—	0,6549	32,928	1,0361	11,678
1,4	1,0584	—	0,7070	31,011	1,0481	13,378
1,5	1,0768	—	0,7599	28,952	1,0627	15,136
1,6	1,0983	—	0,8136	26,768	1,0800	16,935
1,7	1,1243	—	0,8683	24,451	1,1004	18,751
1,8	1,1545	—	0,9233	22,000	1,1239	20,550
1,9	1,1890	—	0,9819	19,428	1,1506	22,311
2,0	1,2286	—	1,0411	16,732	1,1805	24,015
2,1	1,2743	—	1,1022	13,923	1,2135	25,673
2,2	1,3250	—	1,1659	11,000	1,2497	27,233
2,3	1,3810	—	1,2325	7,970	1,2888	28,687
2,4	1,4421	—	1,3019	4,838	1,331	30,021
2,5	1,5111	—	1,3740	1,613	1,375	31,263
2,6	1,5830	—	1,4505	— 1,701	1,422	32,413
2,7	1,6665	—	1,5300	— 5,099	1,470	33,400
2,8	1,7541	—	1,6148	— 8,570	1,521	34,303
2,9	1,8486	—	1,7045	— 12,111	1,572	35,104
3,0	1,9502	—	1,7998	— 15,714	1,625	35,804
3,1	2,0592	—	1,9012	— 19,372	1,679	36,417
3,2	2,1761	—	2,0088	— 23,081	1,733	36,941
3,3	2,3000	—	2,1236	— 26,833	1,787	37,419
3,4	2,4342	—	2,2459	— 30,622	1,842	37,118
3,5	2,5759	—	2,3766	— 34,445	1,897	38,160
3,6	2,7285	—	2,5155	— 38,295	1,952	38,465
3,7	2,8895	—	2,6640	— 42,171	2,006	38,704
3,8	3,0613	—	2,8226	— 46,067	2,060	38,876
3,9	3,2443	—	2,9920	— 49,978	2,114	39,118
4,0	3,4391	—	3,1729	— 53,905	2,168	39,286
4,1	3,6463	—	3,3662	— 57,840	2,221	39,439
4,2	3,8671	—	3,5722	— 61,789	2,273	39,572
4,3	4,1015	—	3,7924	— 65,743	2,326	39,701
4,4	4,3518	—	4,0274	— 69,706	2,378	39,807
4,5	4,6179	—	4,2783	— 73,672	2,429	39,914

$x = kR$	b_0	β_0°	b_1	β_1°	$\frac{kR}{2} \frac{b_0}{b_1}$	$\beta_1 - 45^\circ - \beta_0$
4,6	4,9012	-162,657	4,5460	-77,638	2,480	40,019
4,7	5,2015	-166,726	4,8317	-81,615	2,530	40,111
4,8	5,5244	-170,795	5,1390	-85,590	2,581	40,205
4,9	5,8696	-174,865	5,4619	-89,571	2,631	40,294
5,0	6,2312	-178,933	5,8118	-93,549	2,682	40,384
5,1	6,6203	-176,988	6,1793	-97,533	2,732	40,469
5,2	7,0339	-172,929	6,5745	-101,518	2,782	40,553
5,3	7,4752	-168,860	6,9960	-105,504	2,832	40,634
5,4	7,9455	-164,781	7,4456	-109,492	2,881	40,717
5,5	8,4473	-160,721	7,9253	-113,482	2,931	40,797
5,6	8,9821	-156,652	8,4370	-117,473	2,981	40,875
5,7	9,5524	-152,583	8,9830	-121,465	3,030	40,952
5,8	10,160	-148,513	9,5657	-125,459	3,080	41,028
5,9	10,809	-144,444	10,187	-129,454	3,130	41,102
6,0	11,501	-140,375	10,850	-133,452	3,180	41,173
6,1	12,239	-136,306	11,558	-137,450	3,230	41,244
6,2	13,027	-132,238	12,313	-141,452	3,279	41,310
6,3	13,865	-128,170	13,119	-145,454	3,329	41,376
6,4	14,761	-124,103	13,978	-149,458	3,379	41,439
6,5	15,717	-120,036	14,896	-153,462	3,429	41,502
6,6	16,737	-115,969	15,876	-157,469	3,479	41,562
6,7	17,825	-111,902	16,921	-161,477	3,529	41,621
6,8	18,986	-107,836	18,038	-165,486	3,579	41,678
6,9	20,225	-103,772	19,228	-169,498	3,629	41,730
7,0	21,548	-99,706	20,500	-173,510	3,679	41,784
7,1	22,959	-95,642	21,858	-177,523	3,729	41,835
7,2	24,465	-91,578	23,308	-178,464	3,779	41,886
7,3	26,074	-87,514	24,856	-174,446	3,829	41,932
7,4	27,790	-83,460	26,509	-170,429	3,879	41,969
7,5	29,622	-79,378	28,274	-166,411	3,929	42,023
7,6	31,578	-75,326	30,158	-162,392	3,979	42,066
7,7	33,667	-71,264	32,172	-158,373	4,029	42,109
7,8	35,896	-67,202	34,321	-154,354	4,079	42,152
7,9	38,276	-63,141	36,617	-150,330	4,129	42,189
8,0	40,817	-59,080	39,070	-146,308	4,179	42,228
8,1	43,532	-55,019	41,691	-142,284	4,229	42,265
8,2	46,429	-50,958	44,487	-138,261	4,279	42,303
8,3	49,524	-46,898	47,476	-134,236	4,329	42,338
8,4	52,829	-42,838	50,670	-130,210	4,379	42,372
8,5	56,359	-38,778	54,081	-126,185	4,429	42,407
8,6	60,129	-34,718	57,725	-122,158	4,479	42,440
8,7	64,155	-30,659	61,618	-118,132	4,529	42,473
8,8	68,455	-26,600	65,779	-114,104	4,579	42,504
8,9	73,049	-22,541	70,222	-110,075	4,629	42,534
9,0	77,957	-18,484	74,971	-106,047	4,679	42,563
9,1	83,199	-14,423	80,048	-102,019	4,729	42,596
9,2	88,796	-10,365	85,466	-97,989	4,779	42,624
9,3	94,781	-6,307	91,259	-93,959	4,829	42,652
9,4	101,128	-2,249	97,449	-89,929	4,879	42,680
9,5	108,003	-1,811	104,063	-85,898	4,929	42,709
9,6	115,291	-5,868	111,131	-81,867	4,979	42,735
9,7	123,110	-9,925	118,683	-77,836	5,029	42,761
9,8	131,429	-13,983	126,752	-73,803	5,079	42,786
9,9	140,300	-18,041	135,374	-69,771	5,129	42,812
10	149,831	-22,099	144,586	-65,734	5,179	42,833

Первая производная бесселевой функции нулевого порядка, взятая с обратным знаком, представляет собой бесселеву функцию первого порядка. Значение этой функции, представляющей собой комплекс, может быть определено, если взять с обратным знаком первую производную от ряда, в которую может быть разложена бесселева функция нулевого порядка, и отдельно вычислить для данного значения $x = kR$ действительную и мнимую часть:

$$\frac{dJ_0 \sqrt{-jx}}{d\sqrt{-jx}} = \frac{dJ_0(z)}{dz} = -J_1(z) = -J_1(\sqrt{-jx}) = b_1 e^{j\beta_1}.$$

В таблице приведены модули b_1 и углы β_1 для разных значений $kR = x$.

На основании уравнения (53,9) мы можем теперь найти зависимость между плотностью тока в отдельных точках сечения и всем током, протекающим через проводник. Применяя закон полного тока к индукционной магнитной линии, совпадающей с периметром сечения, для которого $R = a$, мы получаем, что

$$H_{am} \cdot 2\pi a = \sqrt{2} I = 2\pi a \cdot \frac{\delta_{om} e^{j\frac{\pi}{4}}}{k} J_1(\sqrt{-jka}),$$

откуда

$$\delta_{om} = \frac{I k e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2} \pi a J_1(\sqrt{-jka})}. \quad (53,11)$$

Таким образом плотность тока в любой точке сечения круглого проводника определяется через

$$\delta_{Rm} = \frac{I k e^{-j\frac{\pi}{4}} J_0(\sqrt{-j} k R)}{\sqrt{2} \pi a J_1(\sqrt{-j} k a)}. \quad (53,12)$$

Задача 36. Вычертить кривую распределения плотности тока и сдвига фаз по отношению к суммарному току для медного провода с диаметром $2a = 1,2$ см при частоте $f = 2500$ Hz; $\gamma = 51 \cdot 10^4 \frac{1}{\Omega \text{ см}}$. Общий ток равен 110 А.

$$\mu = \mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-9} \frac{\Omega \text{ sec}}{\text{см}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} k^2 &= 2\pi f \gamma \mu = 2\pi \cdot 2500 \frac{1}{\text{sec}} \cdot 51 \cdot 10^4 \frac{1}{\Omega \text{ см}} \cdot 4\pi \cdot 10^{-9} \frac{\Omega \text{ sec}}{\text{см}} = \\ &= 100 \frac{1}{\text{см}^2}; \quad k = 10 \frac{1}{\text{см}}; \quad ka = 10 \frac{1}{\text{см}} \cdot 0,6 \text{ см} = 6; \end{aligned}$$

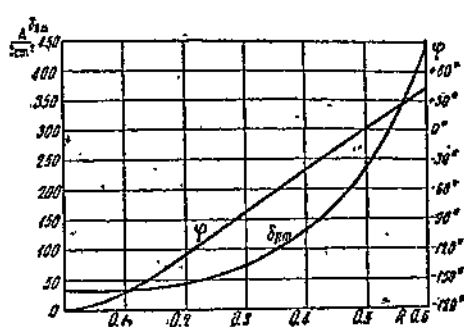
$$J_1(\sqrt{-j} 6) = 10,85 e^{+j133^\circ,45}.$$

Полагаем, что $I = 110$ А, тогда плотность тока в центре будет равна

$$\delta_{om} = \frac{110 \cdot 10^{-1} e^{-j45^\circ}}{\sqrt{2} \pi \cdot 0,6 \cdot 10,85 e^{+j133^\circ,45}} \frac{\text{А}}{\text{см}^2} = 37,9 e^{-j178^\circ,45} \frac{\text{А}}{\text{см}^2}.$$

Амплитуду плотности тока δ_{Rm} в разных точках сечения и соответствующий угол сдвига φ мы находим, применяя формулы (53,9) и (53,8). Результаты вычислений представлены в следующей таблице и на фиг. 162.

$x = kR$	b_0	β_0	δ_{Rm}	φ
0	1	0	$37,9 \frac{A}{cm}$	$-178^\circ,45$
1	1,016	$-14^\circ,2$	38,4	$-164^\circ,25$
2	1,229	$-52^\circ,3$	48,8	$-126^\circ,15$
3	1,950	$-96^\circ,5$	73,7	$-81^\circ,95$
4	3,439	$-138^\circ,2$	131,5	$-40^\circ,25$
5	6,231	$-178^\circ,9$	236,0	$+0^\circ,45$
6	11,501	$-219^\circ,6$	435,0	$+41^\circ,15$



Фиг. 162. Кривые δ_{Rm} и φ в зависимости от R.

54. Активное и реактивное (внутреннее) сопротивления цилиндрических проводов при переменном токе

Падение напряжения на каком-нибудь отрезке проводника складывается из активного падения напряжения $r_a \dot{I}$, где r_a — активное сопротивление, и из индуктивного падения напряжения, которое складывается из индуктивного падения напряжения, обусловленного, с одной стороны, внешним магнитным потоком, замыкающимся вне проводника, и с другой — магнитным потоком, замыкающимся внутри проводника. Обозначим индуктивность от внешнего потока соответствующего отрезка длины через L_e , а приведенную индуктивность, обусловленную внутренним потоком — через L_i . Тогда падение напряжения на отрезок длины l может быть выражено через L_i и L_e следующим образом:

$$\dot{U} = (r_a + j\omega L_e + j\omega L_i) \dot{I}.$$

Индуктивное падение напряжения, обусловленное внешним магнитным потоком для всех трубок, на которые можно разбить рассматриваемый проводник, имеет одно и то же значение. Что касается индуктивного падения напряжения от внутреннего магнитного потока, то трубки, непосредственно прилегающие к внешней поверхности, не будут охватываться внутренним магнитным потоком, и для них $L_i = 0$. Поэтому мы можем написать

$$\begin{aligned} \dot{U} - j\omega L_e \dot{I} &= (r_a + j\omega L_i) \dot{I} = \\ &= \frac{\delta_a l}{\sqrt{2} \gamma} = \frac{l k e^{-j\frac{\pi}{4}} J_0(\sqrt{-j}ka)}{2\gamma \pi a J_1(\sqrt{-j}ka)} \cdot \dot{I}, \end{aligned}$$

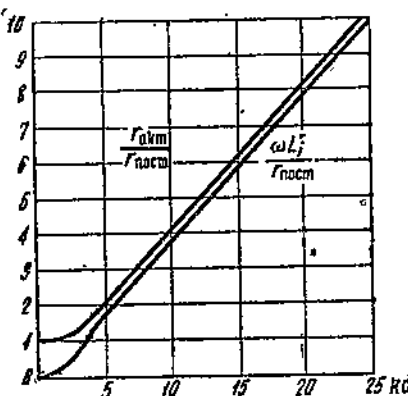
где $\delta_a = \frac{\delta_{am}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_a}$ — вектор эффективного значения плотности тока на периферии (на расстоянии a от оси) проводника, а $\frac{1}{\gamma} = \rho$ — удельное сопротивление проводника. Сокращаем последнее уравнение на $\dot{I}$, выра-

жаем значения бесселевых функций через их модули и поворотные углы и делим обе части на сопротивление при постоянном токе отрезка l длины проводника ($r_{\text{пост}} = \frac{l\rho}{S} = \frac{l}{\gamma\pi a^2}$), тогда мы получим, что

$$\begin{aligned} \frac{r_a + j\omega L_i}{r_{\text{пост}}} &= \frac{(r_a + j\omega L_i)\gamma\pi a^2}{l} = \frac{kac^{-j\frac{\pi}{4}}b_{0a}e^{-j\beta_{0a}}}{2b_{1a}e^{-j\beta_{1a}}} = \\ &= \frac{ka}{2} \cdot \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \cdot e^{j(\beta_{1a} - \frac{\pi}{4} - \beta_{0a})} \end{aligned} \quad (54,1)$$

Выражая правую часть уравнения (54,1) через комплекс, состоящий из действительной и мнимой величин, мы получаем отношение активного сопротивления к сопротивлению при постоянном токе

$$\frac{r_a}{r_{\text{пост}}} = \frac{ka}{2} \cdot \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \cos(\beta_{1a} - 45^\circ - \beta_{0a}), \quad (54,2)$$



Фиг. 163. Кривые $\frac{r_{\text{акт}}}{r_{\text{пост}}}$ и $\frac{L_i}{r_{\text{пост}}}$ в зависимости от ka .

Решение.

$$r_{\text{пост}} = \frac{l}{\gamma S} = \frac{1}{51 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 0,6^2} = 0,0171 \cdot 10^{-4} \Omega;$$

$$\begin{aligned} r_{\text{акт}} &= r_{\text{пост}} \cdot \frac{ka}{2} \cdot \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \cos(\beta_{1a} - 45^\circ - \beta_{0a}) = \\ &= 0,0171 \cdot 10^{-4} \cdot 3,180 \cos 38^\circ \frac{\Omega}{\text{см}} = 0,043 \cdot 10^{-4} \Omega; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega L_i &= r_{\text{пост}} \cdot \frac{ka}{2} \cdot \frac{b_0}{b_{1a}} \sin(\beta_{1a} - 45^\circ - \beta_{0a}) = \\ &= 0,0171 \cdot 10^{-4} \cdot 3,180 \sin 38^\circ \frac{\Omega}{\text{см}} = 0,034 \cdot 10^{-4} \Omega. \end{aligned}$$

а также отношение внутреннего реактивного сопротивления к сопротивлению при постоянном токе

$$\frac{\omega L_i}{r_{\text{пост}}} = \frac{ka}{2} \cdot \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \sin(\beta_{1a} - 45^\circ - \beta_{0a}).$$

В таблице на стр. 186 приведены значения $\frac{ka}{2} \cdot \frac{b_0}{b_1}$ и $\beta_1 - \frac{\pi}{4} - \beta_0$ в зависимости от $ka = \sqrt{\omega\mu}a$, а на фиг.

163 отношения $\frac{r_a}{r_{\text{пост}}}$ и $\frac{\omega L_i}{r_{\text{пост}}}$ в зависимости от той же величины ka .

Задача 37. Вычислить, пользуясь таблицей функций Бесселя, активное и внутреннее реактивное сопротивления 1 см длины приведенного в предыдущей задаче провода.

НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ТОКИ

55. Периодические функции и ряд Фурье

До сих пор явления переменного тока рассматривались нами в предположении, что э. д. с. изменяются гармонически по закону синуса, и было найдено, что при синусоидальных э. д. с. и при неизменном значении элементов цепи r , L и C токи изменяются также по закону синуса с той же частотой. На самом же деле на практике приходится иметь дело не с синусоидами, а с более или менее сложными искаженными кривыми. Так э. д. с., наводимые в генераторах, отступают от синусоиды в зависимости от распределения индукционных линий магнитного потока в воздушном зазоре, которое может меняться в зависимости от нагрузки. Затем даже при синусоидальных э. д. с. форма кривой тока может резко отличаться от синусоиды как вследствие изменения активного сопротивления (например, если в цепь введена вольтова дуга), так и вследствие изменения реактивного сопротивления (например, если в цепи имеется индукционная катушка с насыщенным железным сердечником).

Явления, происходящие в цепях с несинусоидальными э. д. с., проще всего поддаются исследованию, если несинусоидальную э. д. с., периодически меняющуюся, разложить на сумму постоянной слагающей и ряда из переменных слагающих, состоящего из основной синусоиды, меняющейся с таким же числом периодов, как и заданная кривая э. д. с., и высших гармонических синусоид, число периодов которых в 2, 3, 4, 5, ... раз больше числа периодов основной синусоиды.

Фурье показал, что всякую конечную периодическую функцию, получающую через равные промежутки времени те же значения,

$$f(\omega t) = f[\omega(t + T)], \text{ или } f(\alpha) = f(\alpha + 2\pi) \quad (55,1)$$

можно разложить в тригонометрический ряд или в ряд синусоидальных функций

$$f(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \\ + A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k),$$

или

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \varphi_1) + A_2 \sin(2x + \varphi_2) + \\ + A_3 \sin(3x + \varphi_3) + \dots = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx + \varphi_k). \quad (55,2)$$

Синусоида $A_1 \sin(x + \varphi_1)$ является основной, а остальные высшими гармоническими синусоидами [например, $A_7 \sin(7x + \varphi_7)$ — синусоидой седьмого порядка]. Иногда периодические функции представляют в виде двойного ряда, который легко получается, если каждый член предыдущего уравнения разложить по формуле

$$A_k \sin(kx + \varphi_k) = A_k \cos \varphi_k \sin kx + A_k \sin \varphi_k \cos kx.$$

Приравнявая

$$A_k \cos \psi_k = A'_k \text{ и } A_k \sin \psi_k = A''_k,$$

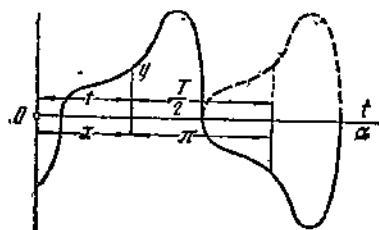
мы можем изобразить ряд Фурье в виде двойного ряда синусов и косинусов, которые в начале координат не имеют сдвига фаз:

$$f(x) = y = A_0 + A'_1 \sin x + A'_2 \sin 2x + A'_3 \sin 3x + \dots + A'_k \sin kx + \dots + A''_1 \cos x + A''_2 \cos 2x + A''_3 \cos 3x + \dots + A''_k \cos kx + \dots \quad (55,3)$$

В тех случаях, когда средняя ордината за целый период равна нулю, в ряде Фурье должна отсутствовать постоянная слагающая A_0 . Это следует из того, что среднее значение ординат кривой должно равняться среднему значению слагаемых ряда Фурье за целый период, а так как среднее значение ординат любой синусоиды за целое число периодов равно нулю, то среднее значение ординат заданной кривой равно постоянному члену ряда Фурье

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx + \psi_k) \right] dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} A_0 \int_0^{2\pi} d\bar{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2k\pi} \int_0^{2\pi k} \sin(kx + \psi_k) dkx = A_0. \end{aligned} \quad (55,4)$$

Если провести так называемую среднюю линию, параллельную оси абсцисс, на расстоянии A_0 , то эта линия будет отсекают равные площади, т. е. площади, получающиеся выше и ниже этой линии и ограниченные этой линией и заданной кривой, будут равны между собой. Отсюда следует, что если ось абсцисс совпадает со средней линией, то $A_0 = 0$ и кривая может быть представлена следующим рядом:



Фиг. 164. Несинусоидальная кривая.

$$y = A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots + A_k \sin(kx + \psi_k) + \dots \quad (55,5)$$

В технике сильных токов приходится иметь дело большей частью с такими э. д. с. и токами, кривые которых симметричны относительно оси x в том отношении, что ординаты в последующие друг за другом моменты времени, считая от начала периода и от начала второй половины периода, равны по величине, но противоположны по направлению (фиг. 164), т. е.

$$f(x) = -f(x + \pi),$$

или

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

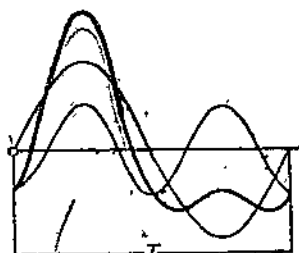
В этом случае мы должны иметь

$$A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \\ + A_4 \sin(4x + \psi_4) + \dots = -A_0 - A_1 \sin(x + \psi_1) - \\ - A_2 \sin(2x + 2\pi + \psi_2) - A_3 \sin(3x + 3\pi + \psi_3) - \\ - A_4 \sin(4x + 4\pi + \psi_4) - \dots$$

Так как изменение фазы синуса на π или на нечетное число π меняет знак у синуса, а изменение фазы на 2π или на четное число π у синуса знака не меняет, то последнее равенство превращается в

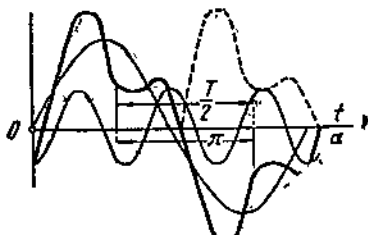
$$2A_0 + 2A_2 \sin(2x + \psi_2) + 2A_4 \sin(4x + \psi_4) + \dots = 0,$$

которое может иметь место только при условии, что $A_0, A_2, A_4, A_6, \dots$, равны нулю. Отсюда следует, что в кривой, симметричной относительно



$$A \sin \omega t - \frac{A}{2} \cos 2\omega t$$

Фиг. 165. Несинусоидальная кривая, содержащая четные гармоники.



$$A \sin \omega t - \frac{A}{2} \cos 3\omega t$$

Фиг. 166. Несинусоидальная кривая, содержащая нечетные гармоники высшего порядка.

оси x , считая от начала первой и второй половины периода, должны отсутствовать постоянная, слагающая и гармоники четных порядков, и такая кривая может быть представлена в виде ряда

$$f(x) = A_1 \sin(x + \psi_1) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + A_5 \sin(5x + \psi_5) + \dots,$$

или

$$f(\omega t) = A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \\ + A_5 \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots \quad (55,6)$$

Так, например, если мы сложим две синусоиды с числами периодов f и $2f$, то, как видно из фиг. 165, соотношение $f(x) = -f(x + \pi)$ недействительно, так как, если кривую сдвинуть на полпериода или на π , мы не получим зеркального изображения кривой за вторую половину периода, если же сложить две синусоиды с числами периодов f и $3f$ (фиг. 166), то последнее соотношение будет иметь место, и кривые за первую и вторую половины периода будут отличаться только знаками своих ординат.

Если кривая периодически переменной величины вдобавок еще и симметрична относительно оси, проходящей через середину между точками пересечения кривой с осью абсцисс, а именно

$$f(x) = f(\pi - x),$$

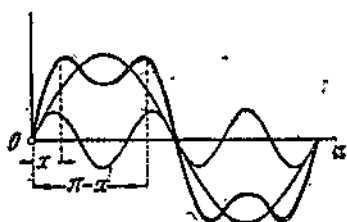
или

$$f(x) = -f(-x),$$

то основная синусоида и все высшие гармоники пересекают ось абсцисс в одной точке.

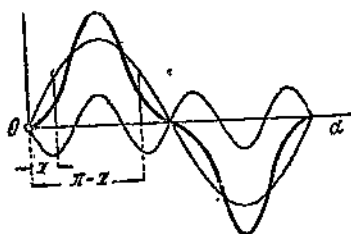
Действительно, мы должны иметь, что

$$\begin{aligned} & A_1' \sin x + A_3' \sin 3x + A_5' \sin 5x + \dots + \\ & + A_1'' \cos x + A_3'' \cos 3x + A_5'' \cos 5x + \dots = \\ & = -A_1' \sin(-x) - A_3' \sin(-3x) - A_5' \sin(-5x) - \dots - \\ & - A_1'' \cos(-x) - A_3'' \cos(-3x) - A_5'' \cos(-5x) - \dots \end{aligned}$$



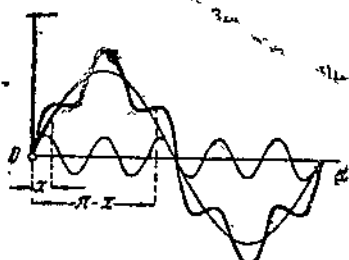
$$A \sin \omega t - \frac{A}{3} \sin 3\omega t$$

Фиг. 167. Несинусоидальная кривая, содержащая третью гармонику, отстоящую по фазе на $1/2$ периода основной синусоиды.



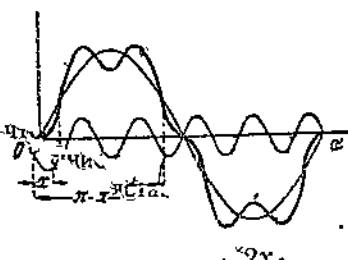
$$A \sin \omega t + \frac{A}{3} \sin 3\omega t$$

Фиг. 168. Несинусоидальная кривая, содержащая третью гармонику, совпадающую по фазе с основной гармоникой.



$$A \sin \omega t + \frac{A}{5} \sin 5\omega t$$

Фиг. 169. Несинусоидальная кривая, содержащая пятую гармонику.



$$A \sin \omega t - \frac{A}{5} \sin 5\omega t$$

Фиг. 170. Несинусоидальная кривая, содержащая пятую гармонику.

Так как синус — функция нечетная, а косинус — четная, вследствие чего синусы меняют свой знак при изменении знака аргумента, а косинусы не меняют, то указанное условие может быть соблюдено только, если

$$A_1'' = A_1 \sin \psi_1 = 0; A_3'' = A_3 \sin \psi_3 = 0; A_5'' = A_5 \sin \psi_5 = 0,$$

т. е. когда ψ_1, ψ_3, ψ_5 и т. д. равны нулю или π .

Ряд Фурье в этом случае принимает вид

$$f(x) = A_1 \sin x + A_3 \sin 3x + A_5 \sin 5x + \dots + A_k \sin kx + \dots, \quad (55,7)$$

где амплитуды $A_1, A_3, A_5, \dots, A_k$ могут быть положительными или отрицательными величинами. Несколько таких кривых представлено фиг. 167—170.

56. Нахождение амплитуд и фаз гармоник аналитическим способом

Чтобы определить амплитуду и фазу A_k и ψ_k как основной, так и любой высшей гармоники порядка $k = 1, 2, 3, \dots$, умножают ординаты заданной кривой на ординаты синусоиды порядка k с амплитудой, равной единице и имеющей то же начало, что и выбранное нами начало заданной кривой, и находят среднее значение этих произведений за полный период данной кривой, т. е. берут среднее значение интеграла в пределах от 0 до 2π :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} A_0 \sin kx \, dx + \right. \\ &+ \int_0^{2\pi} A_1 \sin(x + \psi_1) \sin kx \, dx + \int_0^{2\pi} A_2 \sin(2x + \psi_2) \sin kx \, dx + \dots \\ &+ \int_0^{2\pi} A_k \sin(kx + \psi_k) \sin kx \, dx + \dots + \int_0^{2\pi} A_m \sin(mx + \psi_m) \sin kx \, dx + \dots \left. \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} A_0 \int_0^{2\pi} \sin kx \, dx + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m \sin(mx + \psi_m) \sin kx \, dx. \end{aligned}$$

Первый член правой части уравнения равен нулю, так как он представляет собой среднее значение ординат синусоиды k -го порядка за k целых периодов.

Кроме того, правая часть содержит сумму отдельных интегралов, представляющих собой среднее значение произведений ординат синусоид разных частот за полный период заданной кривой. Из них лишь одно будет являться произведением ординат синусоид $A_k \sin(kx + \psi_k) \sin kx$ одного и того же периода порядка k .

Для определения значений отдельных слагаемых правой части воспользуемся следующими двумя соотношениями:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m \sin(mx + \psi_m) \sin kx \, dx = 0, \text{ когда } m \neq k,$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m \sin(mx + \psi_m) \sin kx \, dx = \frac{A_m}{2} \cos \psi_m, \text{ когда } m = k.$$

Первое соотношение указывает, что среднее значение произведений ординат двух синусоид разных периодов равно нулю, а второе — что среднее значение произведений ординат двух синусоид одинакового периода равно полупроизведению амплитуд (в данном случае одна амплитуда равна единице), умноженному на косинус угла сдвига между

началами синусоид. Поэтому все интегралы второй части уравнения обратятся в нуль за исключением лишь одного интеграла, содержащего произведение ординат синусоид порядка k :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \sin kx \, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_k \sin(kx + \psi_k) \sin kx \, dx = \\ &= \frac{A_k \cos \psi_k}{2} = \frac{A'_k}{2}, \end{aligned}$$

или

$$A'_k = A_k \cos \psi_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin kx \, dx. \quad (56,1)$$

Затем ординаты заданной кривой умножают на

$$\cos kx = \sin \left(kx + \frac{\pi}{2} \right),$$

или на ординаты синусоиды с амплитудой, равной единице и опережающей на четверть периода заданную кривую, и находят среднее значение этих произведений. Математически это выразится так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \cos kx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_0 \cos kx \, dx + \\ + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m \sin(mx + \psi_m) \cos kx \, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_0 \cos kx \, dx + \\ + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m \sin(mx + \psi_m) \sin \left(kx + \frac{\pi}{2} \right) dx. \end{aligned}$$

На оснований вышеприведенных соотношений среднее значение произведений ординат двух синусоид разных периодов, а также первый член правой части будут равны нулю, а среднее значение произведений ординат синусоид одинакового периода — полупроизведению амплитуд и косинуса угла сдвига:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m \sin(mx + \psi_m) \cos kx \, dx &= \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m \sin(mx + \psi_m) \sin \left(kx + \frac{\pi}{2} \right) dx &= 0, \end{aligned}$$

когда $m \neq k$, и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m \sin(mx + \psi_m) \cos kx \, dx = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_m \sin(mx + \psi_m) \sin\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) dx = \\ & = \frac{A_m \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi_m\right)}{2} = \frac{A_m \sin \psi_m}{2}, \end{aligned}$$

когда $m = k$.

Поэтому мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \cos kx \, dx = \frac{A_k \sin \psi_k}{2} = \frac{A_k''}{2},$$

или

$$A_k'' = A_k \sin \psi_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos kx \, dx. \quad (56,2)$$

Зная слагающие амплитуды гармоники порядка k , мы можем определить величину амплитуды и фазу гармоники:

$$A_k = \sqrt{A_k'^2 + A_k''^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \psi_k = \frac{A_k''}{A_k'}. \quad (56,3)$$

При определении угла ψ_k следует учитывать не только знак дроби $\frac{A_k''}{A_k'}$, но и знаки A_k' и A_k'' в отдельности, так, например, если A_k'' и A_k' будут оба иметь знак минус, то угол ψ_k будет лежать в третьем квадранте.

Последовательно беря k равным $1, 2, \dots$, можно определить все величины, которые необходимы для составления ряда.

Точное разложение кривой удастся лишь в том случае, если кривая задается в виде определенных уравнений, которые после умножения на $\sin kx$ и $\cos kx$ поддаются интегрированию.

57. Разложение трапеции в ряд Фурье

Рассмотрим разложение в ряд кривой трапециoidalной формы (фиг. 171). Так как эта кривая симметрична за обе половины периода и симметрична относительно средней линии по отношению к точкам пересечения с осью абсцисс, то можно ограничиться рассмотрением лишь одной четверти периода и, кроме того, искать только A_k' , так как $A_k'' = 0$.

В наклоненной части от $x = 0$ до $x = a$ кривая может быть представлена уравнением

$$y = f(x) = B \cdot \frac{x}{a}$$

и в прямой части от $x = a$ до $x = \frac{\pi}{2}$ — уравнением

$$y = f(x) = B.$$

Подставляя эти выражения в уравнение для амплитуд, мы получаем в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (так как интеграл берется не за целый период, а только за четверть периода, то перед интегралом вместо $\frac{1}{\pi}$ должно быть поставлено $\frac{4}{\pi}$):

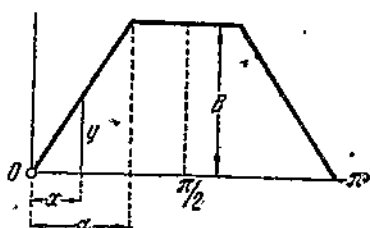
$$\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin kx \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^a B \frac{x}{a} \sin kx \, dx + \frac{4}{\pi} \int_a^{\frac{\pi}{2}} B \sin kx \, dx = A'_k.$$

Первый интеграл равен

$$\begin{aligned} \int_0^a B \frac{x}{a} \sin kx \, dx &= - \int_{x=0}^{x=a} B \frac{x}{ka} \, d \cos kx = - \left(uv - \int v \, du \right) = \\ &= - \left| B \frac{x \cos kx}{ka} \right|_0^a + \int_0^a B \frac{\cos kx}{ka} \, dx = - \frac{B \cos ka}{k} + \\ &+ \left| \frac{B \sin kx}{k^2 a} \right|_0^a = \frac{B \sin ka}{k^2 a} - \frac{B \cos ka}{k}. \end{aligned}$$

Второй интеграл равняется

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} B \sin kx \, dx = \left| - \frac{B \cos kx}{k} \right|_a^{\frac{\pi}{2}} = \frac{B \cos ka}{k}.$$



Фиг. 171. Кривая в виде трапеции.

Подставляя значения этих интегралов в выражение для A'_k , мы получаем

$$\begin{aligned} A'_k &= \frac{4B}{\pi} \left(\frac{\sin ka}{k^2 a} - \frac{\cos ka}{k} + \frac{\cos ka}{k} \right) = \\ &= \frac{4B}{\pi k^2} \cdot \sin ka. \end{aligned}$$

Так как $A'_k = 0$, то, приравнявая $k = 1, 3, 5$ и т. д., мы приходим к следующему ряду для трапеции:

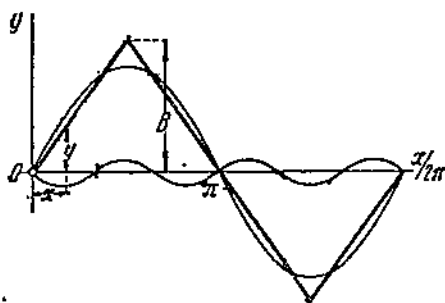
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4B}{\pi} \left(\sin a \sin x + \frac{1}{9} \sin 3a \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5a \sin 5x + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k^2} \sin ka \sin kx + \dots \right). \end{aligned} \quad (57,1)$$

От трапеции мы можем перейти к разным частным случаям.

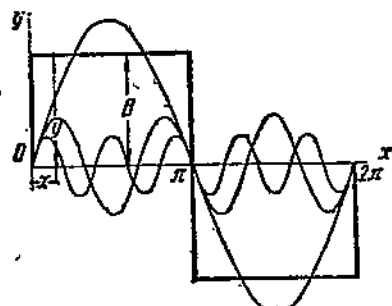
Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то трапеция превращается в треугольник (фиг. 172) с амплитудой B . Для кривой треугольной формы ряд Фурье принимает вид

$$y = \frac{8}{\pi^2} B \left(\sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \dots + \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2} \sin kx \dots \right). \quad (57,2)$$

При треугольной форме кривой амплитуда основной синусоиды $A'_1 = \frac{8}{\pi^2} B = 0,81 B$ меньше максимальной ординаты кривой. Амплитуды высших гармоник сравнительно быстро убывают: амплитуды третьей гармоники составляют 11,1% амплитуды основной синусоиды, пятой — 4%, седьмой — 2% и т. д.



Фиг. 172. Разложение кривой треугольной формы на составляющие гармоники.



Фиг. 173. Разложение кривой прямоугольной формы на составляющие гармоники.

Если в трапеции $\alpha = 0$, то она превращается в прямоугольник (фиг. 173). Выражение для амплитуд получает неопределённое значение, которое легко приводится к следующей величине:

$$A'_k = \frac{4B}{\pi k} \left| \frac{\sin ka}{ka} \right|_{\alpha=0} = \frac{4B}{\pi k},$$

$$A'_1 = \frac{4B}{\pi}; \quad A'_3 = \frac{4B}{3\pi} \text{ и т. д.,}$$

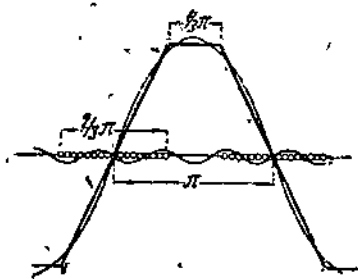
и ряд Фурье для прямоугольной кривой получается в виде

$$f(x) = \frac{4}{\pi} B \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots + \frac{1}{k} \sin kx + \dots \right). \quad (57,3)$$

Кривая прямоугольной формы, как и вообще кривые тупой формы, дает для амплитуды основной синусоиды $\left(\frac{4}{\pi} B = 1,27 B \right)$ величину большую, чем максимальная ордината кривой. Амплитуды высших гармоник в прямоугольной кривой значительно больше, чем в треугольной. В прямоугольной кривой амплитуды третьей гармоники составляют 33,3%, пятой — 20% и т. д. от амплитуды основной синусоиды.

Интересен еще случай, когда в трапеции $\alpha = \frac{\pi}{3}$, тогда в ряде Фурье члены $\sin 3\alpha$, $\sin 9\alpha$ и т. д. превращаются в нуль, т. е. в ряде Фурье пропадают третьи гармоники и все высшие гармоники, кратные трем:

$$y = \frac{12B}{\pi^2} \left(\sin 60^\circ \cdot \sin x + \sin 180^\circ \cdot \frac{\sin 3x}{9} + \sin 300^\circ \cdot \frac{\sin 5x}{25} + \dots \right) = \\ = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} B \left(\sin x - \frac{\sin 5x}{25} + \frac{\sin 7x}{49} - \frac{\sin 11x}{121} + \dots \right) \quad (57,4)$$



Фиг. 174. Разложение кривой трапециoidalной формы на составляющие гармоники.

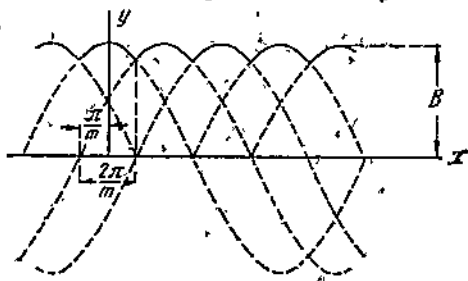
Этим объясняется, что, когда намагничивающая обмотка роторов в турбогенераторах занимает две трети полюсного деления (фиг. 174), то э. д. с. в статоре не содержит третьих гармоник. Рассматриваемая трапециoidalная кривая $\alpha = \frac{\pi}{3}$ довольно близко приближается к синусоиде. Амплитуда основной синусоиды $\frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} B = 1,05B$ лишь на 5% больше максимального значения кривой (высоты трапеции).

Кривая содержит лишь пятую, седьмую, одиннадцатую и т. д. гармоники, причем пятая составляет лишь 4%, седьмая 2% от высоты трапеции. Остальные гармоники не играют роли.

Если бы $\alpha = \frac{\pi}{k}$, то в ряде пропали бы все высшие гармоники порядка, кратного k .

58. Разложение в ряд выпрямленных синусоид

При выпрямлении переменного тока при помощи выпрямителей или вентилей, пропускающих ток только в одном направлении, получается кривая напряжения, которая состоит из вершущек синусоид (фиг. 175). Если выпрямляется m -фазный ток, то период получаемой кривой соответствует сдвигу фаз между двумя последовательными фазами, т. е. $\frac{2\pi}{m}$, уравнение кривой может быть написано в виде $y = B \cos x$, где x меняется в пределах от $-\frac{\pi}{m}$ до $+\frac{\pi}{m}$.



Фиг. 175. Кривая выпрямленного m -фазного синусоидального тока.

Среднее значение (средняя ордината) этой кривой равняется

$$A_0 = \left[\int_{-\frac{\pi}{m}}^{+\frac{\pi}{m}} y dx \right] : \frac{2\pi}{m} = \frac{m}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{m}}^{+\frac{\pi}{m}} B \cos x dx = \frac{mB}{2\pi} \left[\sin x \right]_{-\frac{\pi}{m}}^{+\frac{\pi}{m}} = \\ = \frac{mB}{\pi} \sin \frac{\pi}{m}. \quad (58,1)$$

Рассматриваемая кривая $y = B \cos x$ имеет период, соответствующий не углу 2π , а углу $\frac{2\pi}{m}$, и гармоника порядка k будет иметь период, соответствующий углу $\frac{2\pi}{km}$, поэтому при определении амплитуд гармоник мы должны умножать ординаты заданной кривой не на $\sin kx$ и $\cos kx$, а на $\sin kmx$ и $\cos kmx$:

$$A'_k = \frac{m}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{m}}^{+\frac{\pi}{m}} B \cos x \sin kmx dx = \frac{mB}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{m}}^{+\frac{\pi}{m}} \left[\frac{\sin [(km+1)x]}{2} + \right. \\ \left. + \frac{\sin [(km-1)x]}{2} \right] dx = -\frac{mB}{\pi} \left[\frac{\cos [(km+1)x]}{2(km+1)} - \frac{\cos [(km-1)x]}{2(km-1)} \right]_{-\frac{\pi}{m}}^{+\frac{\pi}{m}} = 0, \\ A''_k = \frac{m}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{m}}^{+\frac{\pi}{m}} B \cos x \cos kmx dx = \\ = \frac{mB}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{m}}^{+\frac{\pi}{m}} \frac{\cos [(km+1)x] + \cos [(km-1)x]}{2} dx = \\ = \frac{mB}{\pi} \left[\frac{\sin [(km+1)\frac{\pi}{m}]}{km+1} + \frac{\sin [(km-1)\frac{\pi}{m}]}{km-1} \right] = \\ = -\frac{mB}{\pi} \cdot \frac{2 \cos k\pi \sin \frac{\pi}{m}}{k^2 m^2 - 1}. \quad (58,2)$$

Зная постоянный член и амплитуды высших гармоник, мы на основании уравнений (55,3), (58,1) и (58,2), подставляя вместо $k = 1, 2, 3, \dots$

$$y = \frac{mB}{\pi} \sin \frac{\pi}{m} \left[1 + \frac{2 \cos m\pi}{m^2 - 1} - \frac{2 \cos 2m\pi}{4m^2 - 1} + \right. \\ \left. + \frac{2 \cos 3m\pi}{9m^2 - 1} - \dots \right], \quad (58,3)$$

можем получить уравнение кривых выпрямленных синусов m -фазного тока.

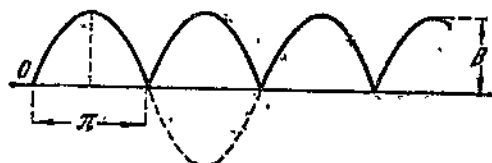
Рассмотрим ряд частных случаев.

Для выпрямленного однофазного тока (фиг. 176) $m = 2$, и кривая выпрямленного напряжения может быть представлена следующим уравнением:

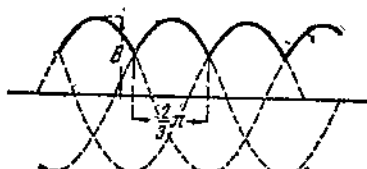
$$y = \frac{2B}{\pi} \left[1 + \frac{2 \cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{2 \cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right]. \quad (58,4)$$

Для выпрямленного трехфазного тока $m = 3$, и уравнение кривой выпрямленного напряжения будет (фиг. 177)

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} B \left[1 + \frac{2 \cos 3x}{2 \cdot 4} - \frac{2 \cos 6x}{5 \cdot 7} + \frac{2 \cos 9x}{8 \cdot 10} - \frac{2 \cos 12x}{11 \cdot 13} + \dots \right] \quad (58,5)$$



Фиг. 176. Кривая выпрямленного однофазного тока.



Фиг. 177. Кривые выпрямленного трехфазного тока.

и для выпрямленного шестифазного тока ($m = 6$) кривая выпрямленного напряжения может быть представлена уравнением

$$y = \frac{3B}{\pi} \left[1 + \frac{2 \cos 6x}{5 \cdot 7} - \frac{2 \cos 12x}{11 \cdot 13} + \frac{2 \cos 18x}{17 \cdot 19} - \frac{2 \cos 24x}{23 \cdot 25} + \dots \right]. \quad (58,6)$$

С увеличением числа фаз отклонения от среднего значения делаются все меньше и меньше.

59. Способ Перри

Обыкновенно периодически изменяющиеся величины даются в виде кривых. В зависимости от точности самой кривой ограничиваются при разложении ее на гармоники небольшим числом этих высших гармоник.

Одним из методов нахождения основной синусоиды и высших гармоник является метод Перри.

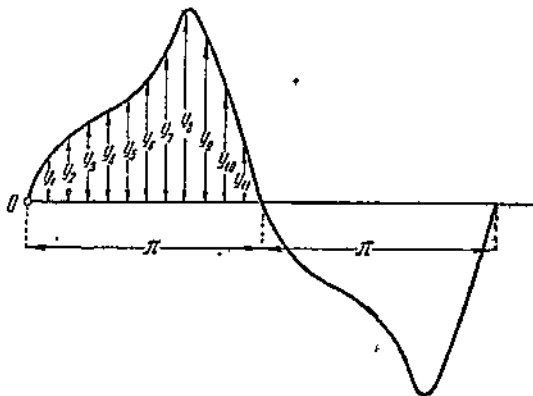
По этому методу разбивают период на определенное число, положим m , равных частей, $\Delta x = \frac{2\pi}{m}$, и вместо интеграла произведений ординат кривой на ординаты соответствующих синусов берут сумму следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx &\approx 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \sum f(x) \sin kx \Delta x = \\ &= 2 \frac{\sum f(x) \sin kx}{m} \approx A_k'. \end{aligned} \quad (59,1)$$

Аналогичным образом определяется и другая слагающая амплитуды A_k'' :

$$2 \frac{\sum f(x) \cos kx}{\pi} \approx A_k'' \quad (59,2)$$

Если переменная изменяется симметрично как в первую, так и во вторую половину периода $f(x) = -f(x + \pi)$, то среднее значение произведений ординат на $\sin kx$ и $\cos kx$ можно брать не за целый период, а лишь за полпериода. В случае же, если кривая, кроме того, симметрична относительно оси, проходящей через середину между точками пересечения кривой осью абсцисс, то можно ограничиться определением среднего значения произведений ординат лишь за четверть полного периода.



Задача 38. Разложить кривую, представленную на фиг. 178.

Решение. Начав с $y = 0$, разобьем полупериод на 12 равных частей и будем производить вычисления, располагая все числа в табличку, причем для сокращения произведем подсчет амплитуд лишь для основной и пятой гармоник.

Фиг. 178. Несинусоидальная кривая.

N	y	k = 1					k = 5					
		$\alpha = \omega t$	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$y \cdot \sin \omega t$	$y \cdot \cos \omega t$	$5\omega t$	$\sin 5\omega t$	$\cos 5\omega t$	$y \cdot \sin 5\omega t$	$y \cdot \cos 5\omega t$	
0	0	0°	0	+1,000	0	0	0°	0	+1,000	0	0	
1	21,5	15°	+0,259	+0,966	+5,57	+20,77	75°	+0,966	+0,259	+20,77	+5,57	
2	32,0	30°	+0,500	+0,866	+16,00	+27,71	150°	+0,500	-0,866	+16,00	-27,71	
3	39,5	45°	+0,707	+0,707	+27,93	+27,93	225°	-0,707	-0,707	-27,93	-27,93	
4	45,5	60°	+0,866	+0,500	+39,40	+22,75	300°	-0,866	+0,500	-39,40	+22,75	
5	52,0	75°	+0,966	+0,259	+50,23	+13,47	375°	+0,259	+0,966	+13,47	+50,23	
6	60,5	90°	+1,000	0	+60,50	0	450°	+1,000	0	+60,50	0	
7	76,0	105°	+0,966	-0,259	+73,42	+19,68	525°	+0,259	-0,966	+19,68	-73,42	
8	100,0	120°	+0,866	-0,500	+86,80	+50,00	600°	-0,866	-0,500	-86,80	-50,00	
9	90,0	135°	+0,707	-0,707	+63,63	-63,63	675°	-0,707	+0,707	-63,63	+63,63	
10	65,0	150°	+0,500	-0,866	+29,29	-75,50	750°	+0,500	+0,866	+29,29	+75,50	
11	35,0	165°	+0,259	-0,966	+9,07	-33,81	825°	+0,966	-0,259	+33,81	-9,07	
12	0	180°	0	-1,000	0	0	900°	0	-1,000	0	0	
Сумма					+464,86	-110,78						
												-20,63
												+10,34

мы можем выразить заданную кривую следующим уравнением:

$$y = 79,6 \sin(\omega t - 13^\circ) + 20,5 \sin(3\omega t + 51^\circ) + 3,8 \sin(5\omega t - 26^\circ) + \dots$$

Следует обратить внимание, что при определении угла ψ_k необходимо по знаку синуса и косинуса установить, в каком квадранте находится угол. Так, если синус положителен, а косинус отрицателен, угол ψ_k лежит во втором квадранте. Затем при построении синусоид следует учесть то обстоятельство, что масштаб абсцисс для разных гармоник неодинаковый: для гармоники порядка k масштаб абсцисс в k раз меньше, чем для самой кривой и ее основной синусоиды. Так как на протяжении 2π по оси абсцисс укладываются k полных синусоид, то при построении кривой на оси абсцисс вместо ψ_k необходимо откладывать $\frac{\psi_k}{k}$.

60. Графический способ Роте

Весьма простой графический метод нахождения амплитуд высших гармоник и фаз был предложен Роте. Этот метод совпадает с методом Перри, но в нем аналитические вычисления заменяются геометрическими построениями. Он состоит в следующем: полный период заданной периодической кривой $y = f(x)$ делят на равное число частей, положим, на $m = 24$, и находят соответствующие ординаты кривой:

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{m-1}.$$

Затем проводят из какого-нибудь центра m радиусов под углом $\frac{2\pi}{m}$ друг к другу (фиг. 179).

Для нахождения амплитуды высшей гармоники порядка k откладывают на этих m радиусах, начиная от горизонтальной линии (которую мы принимаем за направление, соответствующее началу отсчета), последовательно

$$\text{под углами } 0, \frac{k \cdot 2\pi}{m}, 2 \frac{k \cdot 2\pi}{m}, 3 \frac{k \cdot 2\pi}{m}, \dots, (m-1) \frac{k \cdot 2\pi}{m}.$$

$$\text{ординаты } y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{m-1},$$

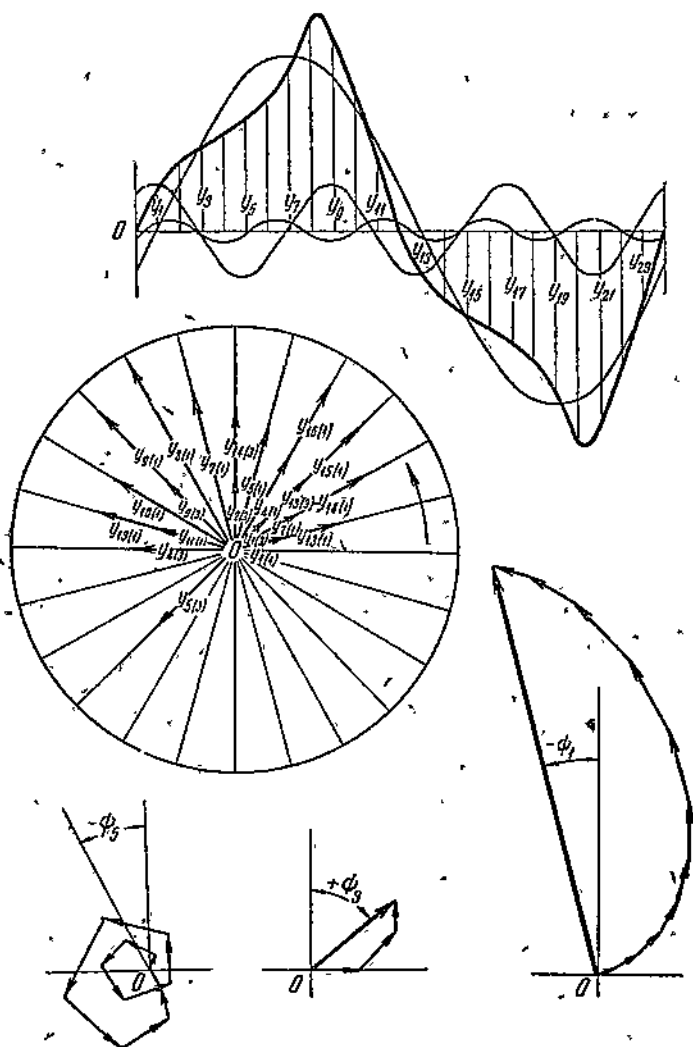
причем если какая-нибудь ордината y имеет отрицательное значение, то ее откладывают не на самом радиусе, а на его продолжении в противоположную сторону.

Полученные на радиусах отрезки геометрически складывают. Геометрическая сумма этих отрезков, деленная на $\frac{m}{2}$, дает в соответствующем масштабе искомую амплитуду порядка k , а угол, образуемый направлением геометрической суммы с вертикальной линией, дает фазу этой гармоники.

Этот способ основан на следующем математическом выводе:

Геометрическая сумма построенных указанным образом отрезков может быть представлена в виде

$$M = y_0 e^{j0} + y_1 e^{j \frac{k \cdot 2\pi}{m}} + y_2 e^{j \cdot 2 \frac{k \cdot 2\pi}{m}} + y_3 e^{j \cdot 3 \frac{k \cdot 2\pi}{m}} + \dots + y_{m-1} e^{j (m-1) \frac{k \cdot 2\pi}{m}}.$$



Фиг. 179. Разложение несинусоидальной кривой на составляющие гармоники по способу Понсе.

Мнимые степени e мы можем заменить через косинусы и синусы:

$$\begin{aligned} \dot{M} = & y_0 \cos 0 + y_1 \cos k \frac{2\pi}{m} + y_2 \cos 2k \frac{2\pi}{m} + y_3 \cos 3k \frac{2\pi}{m} + \\ & + \dots + y_{m-1} \cos (m-1) k \frac{2\pi}{m} + \\ & + j \left[y_0 \sin 0 + y_1 \sin k \frac{2\pi}{m} + y_2 \sin 2k \frac{2\pi}{m} + y_3 \sin 3k \frac{2\pi}{m} + \right. \\ & \left. + \dots + y_{m-1} \sin (m-1) k \frac{2\pi}{m} \right]. \end{aligned} \quad (60,1)$$

Действительная и мнимая части последнего уравнения представляют собой, с одной стороны, проекции геометрической суммы на две взаимно перпендикулярные оси, с другой стороны, они пропорциональны слагающим амплитуды гармоники k . Действительная часть представляет собой сумму отдельных ординат $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ заданной кривой $y = f(x)$, умноженных на $\cos kx$, так как

$$y_0 \cos 0 + y_1 \cos k \frac{2\pi}{m} + y_2 \cos 2k \frac{2\pi}{m} + \dots + y_{m-1} \cos (m-1)k \frac{2\pi}{m} = \sum f(x) \cos kx,$$

и аналогичным образом мнимая часть выражается

$$y_0 \sin 0 + y_1 \sin k \frac{2\pi}{m} + y_2 \sin 2k \frac{2\pi}{m} + \dots + y_{m-1} \sin (m-1)k \frac{2\pi}{m} = \sum f(x) \sin kx,$$

но указанные суммы, как это было выведено выше при рассмотрении способа Перри [уравнения (59,1) и (59,2)], равны порознь проекциям амплитуды гармоники k на две взаимно перпендикулярные оси, умноженным на $\frac{m}{2}$,

$$\sum f(x) \cos kx = \frac{m}{2} A_k^*$$

и

$$\sum f(x) \sin kx = \frac{m}{2} A_k'.$$

Поэтому мы можем написать, что геометрическая сумма m ординат кривой, отложенных последовательно под углом $k \cdot \frac{2\pi}{m}$ друг к другу, равна

$$M = \sum f(x) \cos kx + j \sum f(x) \sin kx = \frac{m}{2} (A_k^* + jA_k'). \quad (60,2)$$

Отсюда следует, что длина отрезка геометрической суммы

$$A_k = \sqrt{A_k'^2 + A_k''^2} = \frac{2M}{m} \quad (60,3)$$

равна амплитуде гармоники k , взятой $\frac{m}{2}$ раза, а отношение проекций геометрической суммы

$$\frac{A_k''}{A_k'} = \operatorname{tg} \psi_k \quad (60,4)$$

определяет тангенс угла сдвига фазы рассматриваемой гармоники.

Когда заданная кривая симметрична, т. е. когда во вторую половину периода ординаты последовательно имеют те же значения, что и в первую половину, то можно ограничиться делением на равное число частей $\frac{m}{2}$ полупериода и откладыванием ординат под углом $k \cdot \frac{2\pi}{m}$.

Искомая амплитуда будет тогда равна не $\frac{2M}{m}$, а $\frac{4M}{m}$. В отличие от обыкновенного порядка фазовые углы ψ_k приходится считать положительными, когда геометрическая сумма отклонена от вертикальной линии в сторону вращения часовой стрелки. Для каждой гармоники построение должно быть проведено особо.

Задача 39. Разложить кривую, симметричную относительно оси x , [$f(x) = -f(x + \pi)$], у которой даны ординаты через 15° (фиг. 179):
 $y = 0; 21,5; 32,0; 39,5; 45,5; 52,0; 60,5; 76,0; 100,0; 90,0; 65,0; 35,0; 0$
 на ряд гармоник.

Решение. Делим $2\pi \equiv 360^\circ$ на $m = 24$ части: $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$, и в масштабе $m_y = 4 \frac{1}{\text{мм}}$, $\frac{1}{m_y} = 0,25$ мм при определении амплитуды основной синусоиды откладываем на горизонтали 0 и на радиусах, проведенных под углами $0; 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 75^\circ; 90^\circ; 105^\circ; 120^\circ; 135^\circ; 150^\circ; 165^\circ$; отрезки $0; 5,4; 7,5; 9,9; 11,4$ мм и т. д. геометрическое сложение дает отрезок длиной $I_1 = 120$ мм. Поэтому амплитуда основной гармоники будет

$$A_1 = \frac{4m_y I_1}{m} = \frac{4 \cdot 4 \frac{1}{\text{мм}} \cdot 120 \text{ мм}}{24} = 80,$$

а фаза по чертежу $\varphi_1 = -13^\circ$.

Для третьей гармоники откладываем

под углами $0; 45^\circ; 90^\circ; 135^\circ; 180^\circ; 225^\circ; 270^\circ; 315^\circ$;
 отрезки $0; 5,4; 7,5; 9,9; 11,4$ мм и т. д.

По геометрической сумме, равной $I_3 = 30,7$ мм, определяем

$$A_3 = \frac{4 \cdot 4 \frac{1}{\text{мм}} \cdot 30,7 \text{ мм}}{24} = 20,5; \quad \varphi_3 = 51^\circ \text{ и т. д.}$$

61. Разложение кривых на высшие гармоники по способу Рунге

В случае если кривая симметрична относительно оси x , а именно $f(x) = -f(x + \pi)$, может быть применен весьма простой и быстро приводящий к конечному результату аналитический способ, предложенный Рунге („ETZ“, 1905), который излагается здесь без соответствующего доказательства. По этому способу для нахождения первых одиннадцати гармоник половина периода делится на 12 равных частей; соответствующие ординаты пишутся в два ряда показанным ниже образом, и образуются сумма и разность ординат, стоящих друг под другом:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	0
Сумма	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
Разность	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6

Кроме того, вычисляют следующие выражения:

$$\begin{aligned} r_1 &= s_1 + s_3 - s_5; \\ r_2 &= s_2 - s_6; \\ c_1 &= d_1 - d_3 + d_5. \end{aligned}$$

Значения этих выражений помещают в нижеследующую таблицу, предварительно умножив их на синус угла, указанного в той же горизонтальной строке.

После указанных в таблице операций мы получаем значения слагающих амплитуд.

Для гармоник	A_k'			A_k''		
	1 и 11	3 и 9	5 и 7	1 и 11	3 и 9	5 и 7
	$x \sin \alpha$			$x \sin \alpha$		
$\sin 15^\circ = 0,259$	s_1	.	s_5	d_4	d_5	d_1
$\sin 30^\circ = 0,5$	s_2	.	s_6	d_4	.	d_4
$\sin 45^\circ = 0,707$	s_3	r_1	$-s_3$	d_3	.	e_1
$\sin 60^\circ = 0,866$	s_4	.	$-s_4$	d_2	.	$-d_2$
$\sin 75^\circ = 0,966$	s_5	.	s_1	d_1	$-d_4$	d_5
$\sin 90^\circ = 1$	s_6	r_2	s_6	.	.	.
Сумма первого столбца	s_1	s_1	s_1	s_1	s_1	s_1
Сумма второго столбца	s_2	s_2	s_2	s_2	s_2	s_2
Сумма этих чисел	$6A_1'$	$6A_3'$	$6A_5'$	$6A_1''$	$6A_3''$	$6A_5''$
Разность этих чисел	$6A_{11}'$	$6A_9'$	$6A_7'$	$6A_{11}''$	$6A_9''$	$6A_7''$
Слагающие амплитуд	A_1'	A_3'	A_5'	A_1''	A_3''	A_5''
	A_{11}'	A_9'	A_7'	A_{11}''	A_9''	A_7''

Задача 40. Разложить по этому методу ту же кривую, что и в предыдущей задаче. Выписываем значения ординат в указанном порядке и определяем сумму и разность.

	21,5	32,0	39,5	45,5	52,0	60,5
	35,0	65,0	90,0	100,0	76,0	0
Сумма . .	56,5	97,0	129,5	145,5	128,0	60,5
Разность .	-13,5	-33,0	-50,5	-54,5	-24,0	60,5
$r_1 = 56,5 + 129,5 - 128,0 = 58,0;$						
$r_2 = 97,0 - 60,5 = 36,5;$						
$e_1 = -13,5 + 50,5 + 24,0 = 61,0.$						

Подставляя эти числа в таблицу, предварительно умножив их на синус соответствующего угла и пользуясь счетной линейкой, мы весьма быстро получаем желаемый результат.

Для гармоник порядка	A_k'			A_k''		
	1 и 11	3 и 9	5 и 7	1 и 11	3 и 9	5 и 7
	$x \sin \alpha$			$x \sin \alpha$		
$\sin 15^\circ$	14,63	—	33,15	-6,22	—	-3,50
$\sin 30^\circ$	48,50	—	48,50	-27,25	—	-27,50
$\sin 40^\circ$	91,56	41,01	-91,56	-35,70	43,13	35,70
$\sin 60^\circ$	126,00	—	-126,00	-28,58	—	28,58
$\sin 75^\circ$	123,65	—	54,58	-13,04	52,65	-23,18
$\sin 90^\circ$	60,50	36,50	60,50	—	—	—
Сумма первого столбца	229,84	41,01	-3,83	-55,83	52,65	1,33
Сумма второго столбца	235,00	36,50	-17,00	-54,96	43,13	9,02
Сумма этих чисел	464,84	77,51	-20,83	-110,79	95,78	10,35
Разность этих чисел	-5,16	4,51	13,17	-0,87	9,52	-7,69
Слагающие амплитуд	77,45	12,92	-3,47	-18,46	15,96	1,73
	-0,86	0,75	2,20	-0,15	1,59	-1,28

Таким образом заданная кривая может быть представлена в виде ряда
 $y = 79,6 \sin(\omega t - 13^\circ) + 20,5 \sin(3\omega t + 51^\circ) + \dots$

62. Графический способ разложения в ряд Фишер-Гиннена

Приведем еще способ Фишер-Гиннена, который не требует сложных построений и вычислений, но и не обладает большой точностью.

В основу этого способа положены следующие тригонометрические формулы:

$$\sum_{n=1}^{n=m} \sin \left[k \left(x + \frac{2\pi n}{m} \right) + \psi_k \right] = 0, \quad (62,1)$$

когда $\frac{k}{m}$ есть дробь, и

$$\sum_{n=1}^{n=m} \sin \left[k \left(x + \frac{2\pi n}{m} \right) + \psi_k \right] = m \sin (kx + \psi_k), \quad (62,2)$$

когда $\frac{k}{m}$ — целое число.

Правильность этих соотношений вытекает из следующего. Обе суммы представляют собой суммы ординат синусоид одного и того же числа периодов, сдвинутых друг относительно друга, а потому арифметическое сложение мгновенных значений может быть заменено геометрическим сложением их векторов. Эти векторы разнятся друг от друга по фазе на угол

$2\pi \cdot \frac{k}{m} n$, где вместо n

мы должны подставить последовательно $1, 2,$

$3, \dots, m$. Когда $\frac{k}{m}$ —

целое число, векторы отличаются друг от друга

по фазе на целое число 2π , поэтому все векторы

совпадают по направлению и дают одну и ту же проекцию на вертикальную

ось. Когда же $\frac{k}{m}$ есть дробь, то мы, переходя от одного вектора к другому,

смещаемся каждый раз на часть окружности, а так как m таких частей долж-

ны составлять целое число окружностей, то векторы будут равномерно рас-

положены около центра и в сумме дадут нуль, а потому и сумма проекций

этих векторов будет равна нулю.

Предположим, что требуется разложить кривую, представленную на

фиг. 180, в ряд, кончая высшей гармоникой одиннадцатого порядка.

Выбираем произвольную точку O за начало координат. Относительно

этой точки кривая y может быть представлена в виде,

$$\begin{aligned} y = f(x) &= A_1 \cos \psi_1 \sin x + A_3 \cos \psi_3 \sin 3x + \dots + \\ &+ A_1 \sin \psi_1 \cos x + A_3 \sin \psi_3 \cos 3x + \dots = \\ &= A'_1 \sin x + A'_3 \sin 3x + A'_5 \sin 5x + \dots + \\ &+ A''_1 \cos x + A''_3 \cos 3x + A''_5 \cos 5x + \dots \end{aligned} \quad (62,3)$$

Ордината y_0 в начале координат ($x=0$), если ограничиться гармоникой одиннадцатого порядка, выразится через

$$\begin{aligned} M_1 = y_1 &= A_1 \sin \psi_1 + A_3 \sin \psi_3 + A_5 \sin \psi_5 + \dots + A_{11} \sin \psi_{11} = \\ &= A'_1 + A'_3 + A'_5 + \dots + A'_{11}. \end{aligned} \quad (62,4)$$

Затем делим расстояние Oa , соответствующее одному периоду, на m равных частей, например, на 3, и находим алгебраическую сумму соответствующих ординат: $M_3 = y_3^I + y_3^{II} + y_3^{III}$.

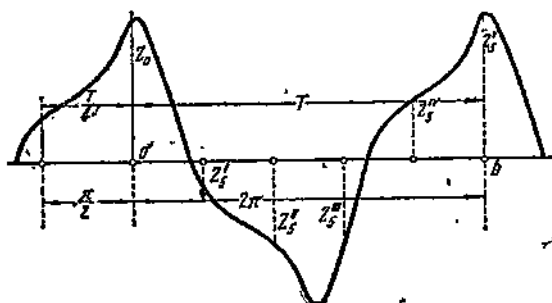
Если y_3^I , y_3^{II} и y_3^{III} заменить суммой ординат гармоник, вместо x подставив $\frac{2\pi}{3}$, $2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ и $3 \cdot \frac{2\pi}{3}$, и сгруппировать ординаты, принадлежащие синусоидам одного и того же периода, то мы получим, что сумма трех равно отстоящих друг от друга ординат может быть представлена следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{n=3} A_1 \sin\left(\frac{2\pi n}{3} + \psi_1\right) + \sum_{n=1}^{n=3} A_3 \sin\left(\frac{3 \cdot 2\pi n}{3} + \psi_3\right) + \\ + \sum_{n=1}^{n=3} A_5 \sin\left(\frac{5 \cdot 2\pi n}{3} + \psi_5\right) + \dots + \sum_{n=1}^{n=3} A_{11} \sin\left(\frac{11 \cdot 2\pi n}{3} + \psi_{11}\right).$$

На основании приведенных выше тригонометрических формул сумма каждой группы равна нулю за исключением групп тех синусоид, порядок которых кратен трем и для которых сумма ординат равна тройной ординате для $x=0$ или $x=2\pi$:

$$M_3 = 3A_3 \sin \psi_3 + 3A_9 \sin \psi_9 = 3(A_3^* + A_9^*). \quad (62,5)$$

Далее, делим расстояние Oa на пять равных частей и находим алгебраическую сумму M_5 соответствующих пяти ординат, которая должна равняться пятикратной ординате синусоиды пятого порядка для значения $x=0$ или $x=2\pi$.



$$M_5 = 5A_5 \sin \psi_5 = 5A_5^*. \quad (62,6)$$

Равным образом находим сумму семи, девяти и одиннадцати равно отстоящих ординат за период

$$M_7 = 7A_7^*; \quad (62,7)$$

$$M_9 = 9A_9^*; \quad (62,8)$$

$$M_{11} = 11A_{11}^*. \quad (62,9)$$

Фиг. 181. Разложение кривой по способу Фишера-Гиннена.

(62,4—9) с шестью неизвестными, из которых легко определяются A_1^* , A_3^* , A_5^* , ..., A_{11}^* .

Перенесем теперь начало координат в новую точку O' (фиг. 181), отстоящую от выбранного нами раньше начала координат O на расстоянии $\frac{\pi}{2}$. Подставляя в выражение $f(x)$ [уравнение (62,1)] величину $\frac{\pi}{2}$ вместо x и принимая во внимание, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi_k\right) = \cos \psi_k \quad (62,4-9),$$

и что для $k=3, 5, 7$ и т. д. соответствующие синусы выразятся через косинусы ψ_k :

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2} + \psi_k\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos \psi_k,$$

мы находим, что ордината $N = z_0$, соответствующая моменту $\frac{T}{4}$ от начала отсчета, равна

$$N = z_0 = A_1 \cos \psi_1 - A_3 \cos \psi_3 + A_5 \cos \psi_5 - \dots - A_{11} \cos \psi_{11} = \\ = A'_1 - A'_3 + A'_5 - A'_7 + A'_9 - A'_{11}.$$

Затем берем отрезок $O'b = 2\pi$, делим его сначала на три равные части и находим N_3 — алгебраическую сумму соответствующих трех ординат. Она равна

$$N_3 = z_3^I + z_3^{II} + z_3^{III}.$$

С другой стороны, эта сумма равна тройной сумме ординат синусоид порядка, кратного трем для $x = \frac{\pi}{2}$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi$,

$$N_3 = 3 \left[A_3 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \psi_3 \right) + A_9 \sin \left(\frac{9\pi}{2} + \psi_9 \right) \right] = 3 [-A_3 \cos \psi_3 + A_9 \cos \psi_9] = \\ = 3 (-A'_3 + A'_9).$$

Точно так же, деля $O'b$ на 5, 7, 9 и 11 частей, находим, что алгебраические суммы соответствующих ординат составляют:

$$N_5 = 5A'_5; N_7 = -7A'_7; N_9 = 9A'_9; N_{11} = -11A'_{11}.$$

Из нового ряда шести уравнений находим шесть неизвестных:

$$A'_1, A'_3, A'_5, A'_7, A'_9, A'_{11}.$$

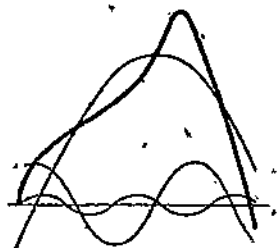
После того как известны A'_1 и A'_3 , A'_5 и A'_7 , A'_9 и A'_{11} и т. д., нетрудно определить амплитуды и взаимное расположение синусоид, как это было указано выше. Например, амплитуды синусоиды седьмого порядка

$$A_7 = \sqrt{A'^2_7 + A''^2_7} = \sqrt{(A_7 \cos \psi_7)^2 + (A_7 \sin \psi_7)^2},$$

и начало этой синусоиды сдвинуто относительно выбранной нами точки O на угол ψ_7 , для которого

$$\operatorname{tg} \psi_7 = \frac{A''_7}{A'_7} = \frac{A_7 \sin \psi_7}{A_7 \cos \psi_7}.$$

На фиг. 182 показаны кривая и синусоиды, на которые она может быть разложена, кончая синусоидой пятого порядка.



Фиг. 182. Разложение кривой.

68. Явления в цепях переменного тока с несинусоидальными напряжениями

По какому бы закону ни изменялось напряжение, действующее в цепи, состоящей из неизменных элементов r , L и C , оно в любой момент должно распадаться на три слагающих: активное падение напряжения, слагающую, уравновешивающую противодействующую индуктивную э. д. с., и напряжение, равное и противоположное разности потенциалов на обкладках конденсатора,

$$u = ir + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = ir + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt. \quad (63,1)$$

Дифференцируя это уравнение, мы получаем, что между напряжением и током должно существовать соотношение

$$\frac{du}{dt} = r \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} \quad (63,2)$$

Если напряжение представляется сложной периодической кривой, то оно может быть разложено по ряду Фурье на постоянную слагающую, которую мы обозначаем через U_0 , основную синусоиду и высшие гармоники:

$$u = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots \quad (63,3)$$

По принципу суперпозиции (принципу наложения или сложения колебаний) мгновенное значение тока в цепи при установившемся режиме будет равно сумме мгновенных значений токов, которые получились бы в этой цепи, если бы в ней действовали совершенно независимо друг от друга как постоянная слагающая и основная синусоида, так и каждая из высших гармоник напряжения в отдельности. Постоянная слагающая напряжения дает слагающую тока лишь в случае, если в цепи нет емкости. Предположим, что $U_0 = 0$ и что кривая содержит только гармоники нечетного порядка

$$i = i_1 + i_3 + i_5 + \dots + i_k + \dots$$

При неизменном значении элементов цепи r , L и C как основная синусоида, так и каждая из высших гармоник напряжения должны в отдельности удовлетворять вышеприведенному дифференциальному уравнению. Ток, получаемый в цепи только под действием какой-нибудь одной из составных синусоид (основной или высшей гармонической), например, третьей гармонической $U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3)$, будет удовлетворять дифференциальному уравнению в том случае, если он будет изменяться следующим образом:

$$i_3 = I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) = \frac{U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3)}{\sqrt{r^2 + \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right)^2}}$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{3\omega L - \frac{1}{3\omega C}}{r}$$

Для третьей гармоники угловая частота равна не ω , а 3ω , поэтому реактанс индуктивности равен $3\omega L$, а реактанс емкости равен $\frac{1}{3\omega C}$.

Действительный ток в цепи будет состоять из основной синусоиды

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1),$$

где

$$I_{1m} = \frac{U_{1m}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \text{ и } \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}$$

и ряда высших гармоник; он может быть представлен в виде

$$i = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k - \varphi_h)}{\sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}},$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_h = \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{r} \quad (63,4)$$

Так как полное сопротивление для каждой из гармоник имеет свою особую величину и свой угол сдвига, то составные синусоиды тока имеют амплитуды, не пропорциональные амплитудам составных синусоид напряжения, и взаимный сдвиг гармоник тока отличается от взаимного сдвига гармоник напряжения, а потому форма кривой тока может отличаться от формы кривой напряжения. Лишь в частном случае, когда цепь содержит одно только активное сопротивление, ток в каждый момент пропорционален напряжению и кривая тока отличается от кривой напряжения только масштабом.

Если в цепи имеется только индуктивность ($r=0$, $C=\infty$), то

$$i = \frac{U_{1m}}{\omega L} \sin\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{U_{3m}}{3\omega L} \sin\left(3\omega t + \varphi_3 - \frac{\pi}{2}\right) + \dots + \frac{U_{km}}{k\omega L} \sin\left(k\omega t + \varphi_k - \frac{\pi}{2}\right), \quad (63,5)$$

и амплитуды высших гармоник тока убывают быстрее, чем амплитуды соответствующих синусоид напряжения, вследствие того что полное сопротивление увеличивается пропорционально числу периодов:

$$I_{1m} = \frac{U_{1m}}{\omega L}; \quad I_{3m} = \frac{U_{3m}}{3\omega L} \dots I_{km} = \frac{U_{km}}{k\omega L}.$$

Когда в цепи имеется только емкость ($r=0$, $L=0$), ток равен

$$i = \omega C U_{1m} \sin\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) + 3\omega C U_{3m} \sin\left(3\omega t + \varphi_3 + \frac{\pi}{2}\right) + \dots + k\omega C U_{km} \sin\left(k\omega t + \varphi_k + \frac{\pi}{2}\right), \quad (63,6)$$

и благодаря уменьшению полного сопротивления $\frac{1}{k\omega C} = Z_k$, с повышением числа периодов амплитуды высших гармоник для тока относительно увеличиваются:

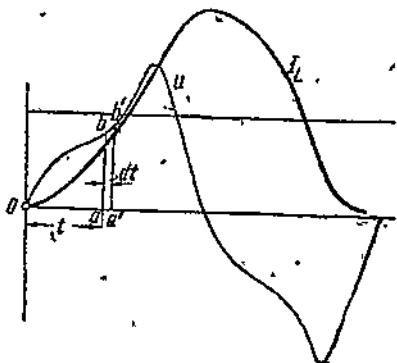
$$I_{1m} = \omega C U_{1m}; \quad I_{3m} = 3\omega C U_{3m} \dots I_{km} = k\omega C U_{km}.$$

Таким образом при несинусоидальных напряжениях в случае индуктивной нагрузки ток приближается к синусоиду; в случае же емкостной нагрузки (например, ненагруженная кабельная сеть) весьма сильно выступают высшие гармонические слагающие тока, и ток изменяется по весьма искаженной кривой.

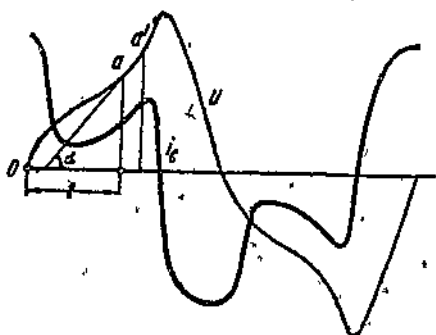
В случае если в цепи имеется лишь индуктивность или лишь емкость, то для заданной кривой напряжения можно найти кривую тока без разложения кривой напряжения в ряд Фурье. При $r = 0$ мгновенные значения напряжения и тока при наличии в цепи только индуктивности L связаны уравнением

$$u = L \frac{di}{dt}, \text{ или } i = \int_0^t \frac{u dt}{L}.$$

Для нахождения кривой тока мы выбираем какую-нибудь точку на оси абсцисс за начало координат, например, момент, для которого



Фиг. 183. Графическое нахождение формы кривой, когда $r = 0$, $C = \infty$.



Фиг. 183а. Графическое нахождение формы кривой тока, когда $r = 0$ и $L = 0$.

$u = 0$, и определяем, начиная от точки O , последовательно площади Oab , $Oa'b'$ и т. д. (фиг. 183). Величины этих площадей пропорциональны $\int_0^t u dt$.

Деля значения этих площадей на L и откладывая их в соответствующем масштабе на ординатах, мы получаем кривую тока относительно некоторой неизвестной еще оси абсцисс. Так как в нашем случае при установившемся режиме количество зарядов, которые текут в одну сторону, должно за время одного полного периода равняться количеству зарядов, текущих в другую сторону, то для нахождения мгновенных значений тока мы должны провести для получения кривой ось абсцисс таким образом, чтобы она отсекала от кривой равные площади. Максимум тока мы имеем в точках, для которых $u = 0$, так как переменная i имеет максимум, когда первая производная ее равна нулю: $\frac{di}{dt} = 0$.

Если в цепи имеется лишь емкость, то исходным для определения тока является уравнение

$$q = Cu, \text{ или } i = C \frac{du}{dt},$$

т. е. мгновенное значение тока пропорционально тангенсу угла, который касательная к кривой напряжения составляет с осью абсцисс (фиг. 183а). Из того же соотношения следует, что ток равен нулю, когда напряжение имеет максимальное значение.

Когда цепь состоит из последовательно соединенных активного сопротивления, индуктивного сопротивления и емкости, то возможно, что для какой-нибудь из высших гармоник будет иметь место явление резонанса или близкое к резонансу состояние, для которого $k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \approx 0$.

В кривой тока эта высшая гармоника будет проявляться весьма резко, и при весьма небольшом значении амплитуды соответствующей синусоиды по сравнению с амплитудой основной синусоиды напряжения, амплитуда тока этой гармоники может быть во много раз больше амплитуды основной синусоиды тока. На этом основано выделение высших гармоник при помощи резонанса.

Задача 41. Требуется построить кривую тока для напряжения, заданного кривой (фиг. 178): 1) если в цепи имеется лишь индуктивность, реактивное сопротивление которой для основной гармоники равно $x_L = \omega L$; 2) если в цепи имеется только емкость, реактивное сопротивление которой для основной гармоники равно тому же:

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = x_L.$$

На фиг. 183 и 183а и б эти кривые вычерчены в масштабе.

64. Измерение несинусоидальных токов

Переменный ток произвольной формы измеряется его эффективным значением, равным такому эквивалентному постоянному току, который, проходя через то же сопротивление, поглощает в секунду, такое же количество энергии. Если сопротивление равно r , то количество энергии, поглощенной в единицу времени, выражается через

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T r i^2 dt = r \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = r I^2.$$

Выражая i в виде гармонического ряда, получаем

$$P = r \frac{1}{T} \int_0^T [I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2 - \varphi_2) + \dots + I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) + \dots]^2 dt.$$

После возведения в квадрат интеграл распадается на ряд интегралов, дающих в результате, с одной стороны, квадрат постоянной слагающей I_0^2 и средние значения квадратов мгновенных значений отдельных синусоид, которые на основании теоремы, выведенной в § 3, будут равны

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) dt = \frac{I_{km}^2}{2},$$

а с другой — интегралы средних значений удвоенных произведений мгновенных значений синусоид разных порядков. Эти последние как средние значения произведений ординат разных синусоид равны нулю:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T 2I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) I_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n - \varphi_n) dt = \\ = \frac{1}{T} \int_0^T I_{km} I_{nm} \cos[(k-n)\omega t + \psi_k - \varphi_k - \psi_n + \varphi_n] dt = \\ - \frac{1}{T} \int_0^T I_{km} I_{nm} \cos[(k+n)\omega t + \psi_k - \varphi_k + \psi_n - \varphi_n] dt = 0. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} P = r \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = r \left(I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \dots + \frac{I_{km}^2}{2} + \dots \right) = \\ = r(I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots) = rI^2. \quad (64,1) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что эффективное значение периодического тока, изменяющегося по произвольной периодической кривой, равно корню квадратному из суммы квадратов эффективных значений отдельных гармоник:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots} \quad (64,2)$$

Аналогично этому эффективное значение э. д. с. или напряжения сложной формы

$$u = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \\ + U_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots$$

равняется корню квадратному из суммы квадратов эффективных значений отдельных гармоник:

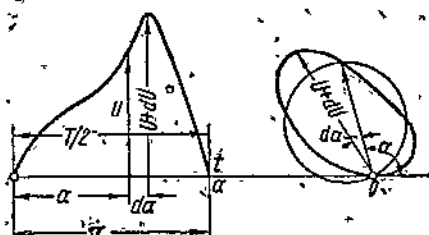
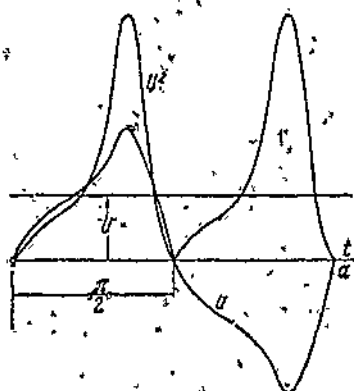
$$\begin{aligned} U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}, \quad (64,3) \\ U_1 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}}; U_3 = \frac{U_{3m}}{\sqrt{2}} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Эффективные значения обычно находят таким образом, что на ординатах откладывают квадраты соответствующих мгновенных значений (фиг. 184) и извлекают из средней ординаты за период или полпериода корень квадратный или, когда кривая симметрична относительно начала обоих периодов, поступают еще проще: строят по способу, предложенному Кеннелли, графически данную кривую в полярных координатах (фиг. 185). На радиусах-векторах, проведенных под углом $\alpha = \omega t = 2\pi f t$, откладывают соответственные мгновенные значения. Если

длину абсциссы, равной полупериоду, приравнять π , то эффективное значение кривой может быть выражено таким образом:

$$U = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u^2 d\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{u^2 d\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi} S},$$

$\frac{u^2 d\alpha}{2}$ представляет собой элементарную площадку между двумя бесконечно близкими друг к другу радиусами-векторами, а весь интеграл $\int_0^{\pi} \frac{u^2 d\alpha}{2}$ представляет собой площадь, ограниченную кривой, проходящей через концы радиусов-векторов. Эта площадь S может быть найдена планиметром. Если заданная кривая была бы синусоидой, то в полярных координатах она представлялась бы окружностью с диаметром, равным амплитуде. Поэтому, если мы построим круг $S = \frac{\pi U_m^2}{4}$, равновеликий площади, очерченной заданной кривой в полярных



Фиг. 184. Нахождение эффективного значения ординат заданной кривой.

Фиг. 185. Графическое нахождение эффективного значения кривой.

координатах, то диаметр круга, деленный на $\sqrt{2}$, и даст искомое эффективное значение напряжения:

$$U = \sqrt{\frac{2}{\pi} S} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot U_m^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (64,4)$$

Изображение заданной кривой в полярных координатах дает наглядное представление о том, насколько она отстает от синусоиды.

Задача 42. Найти аналитическим и графическим путями эффективное значение напряжения, изменяющегося по кривой фиг. 178, считая, что в задаче 38 даны в качестве u мгновенные напряжения в вольтах.

Решение. На основании результатов задачи 38 имеем

$$U_{1m} = 79,6 \text{ В}; \quad U_{2m} = 20,5 \text{ В}; \quad U_{3m} = 3,8 \text{ В},$$

следовательно,

$$U \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{79,6^2 + 20,5^2 + 3,8^2} \text{ В} = 58 \text{ В}.$$

На фиг. 184 и 185 значение U найдено графически в масштабе кривой u .

65. Влияние формы кривых напряжения на определение элементов цепи

Вольтметры и амперметры, измеряющие переменные напряжения и токи, дают эффективные значения этих величин.

Для определения индуктивности какой-нибудь катушки, активным сопротивлением которой можно пренебречь ($r=0$), при синусоидальных напряжениях нужно разделить эффективное значение напряжения на эффективное значение тока и полученную величину разделить на угловую частоту:

$$L = \frac{U}{\omega I}; \quad (65,1)$$

при несинусоидальном напряжении [уравнение (64,3)] ($U_0=0$)

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} = U_1 \sqrt{1 + \frac{U_2^2}{U_1^2} + \frac{U_3^2}{U_1^2} + \dots} \quad (65,2)$$

эффективное значение тока будет равно корню квадратному из эффективных значений гармоник тока (64,2)

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{U_1^2}{\omega^2 L^2} + \frac{U_2^2}{9\omega^2 L^2} + \frac{U_3^2}{25\omega^2 L^2} + \dots} = \\ &= \frac{U_1}{\omega L} \sqrt{1 + \frac{U_2^2}{9U_1^2} + \frac{U_3^2}{25U_1^2} + \dots} \end{aligned} \quad (65,3)$$

Если бы мы для определения индуктивности применили формулу (65,1), то на основании формул (65,2) и (65,3) мы получили бы для индуктивности величину L' :

$$L' = \frac{U}{\omega I} = L \sqrt{\frac{1 + \frac{U_2^2}{U_1^2} + \frac{U_3^2}{U_1^2} + \dots}{1 + \frac{U_2^2}{9U_1^2} + \frac{U_3^2}{25U_1^2} + \dots}} > L, \quad (65,4)$$

которая была бы больше действительной величины L , так как в дроби, стоящей под корнем, знаменатель меньше числителя. Однако ошибка при этом была бы невелика.

Предположим, что $U_3 = 0,2U_1$ и $U_6 = 0,1U_1$, тогда

$$\sqrt{\frac{1 + 0,04 + 0,01}{1 + 0,0044 + 0,0004}} = 1,02,$$

т. е. ошибка составляет около 2%.

Если подобным же образом определять емкость, измеряя напряжение между обкладками и ток в цепи,

$$\omega C = \frac{I}{U}, \text{ или } C = \frac{I}{\omega U}, \quad (65,5)$$

то, так как ток при наличии только емкости в цепи равен

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\omega^2 C^2 U_1^2 + 9\omega^2 C^2 U_2^2 + 25\omega^2 C^2 U_3^2 + \dots} = \\ &= \omega C U_1 \sqrt{1 + 9 \frac{U_2^2}{U_1^2} + 25 \frac{U_3^2}{U_1^2} + \dots}, \end{aligned} \quad (65,6)$$

разделив значение тока I на ωU [см. (65,6) и 65,2)], мы получили бы следующее выражение для емкости:

$$C' = C \sqrt{\frac{1 + 9 \frac{U^2}{U_1^2} + 25 \frac{U_1^2}{U_1^2} + \dots}{1 + \frac{U_1^2}{U_1^2} + \frac{U_1^2}{U_1^2} + \dots}} > C, \quad (65,7)$$

т. е. мы получили бы величину емкости большую, чем действительная. Для той же кривой напряжения, что и в случае индуктивности, поправочный коэффициент равен

$$\sqrt{\frac{1 + 9 \cdot 0,04 + 25 \cdot 0,01}{1 + 0,04 + 0,01}} = 1,24,$$

т. е. вычисленная величина емкости на 24% больше действительной, что явно неприемлемо.

66. Резонансные кривые

При несинусоидальных напряжениях в цепях переменного тока, состоящих из емкости и индуктивности и сравнительно небольшого сопротивления, наблюдаются весьма интересные явления, если менять в широких пределах или емкость или индуктивность. При плавном изменении емкости или индуктивности эффективное значение тока изменится по так называемой резонансной кривой, которая может иметь несколько пикообразных максимумов.

Как было выведено выше, ток в цепи равен

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots + I_k^2 + \dots},$$

где отдельные слагающие зависят от амплитуд соответствующих гармоник и от значений полного сопротивления для этих гармоник:

$$I_k = \frac{U_k}{\sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}.$$

Меняя постепенно, например, L , можно поочередно создавать резонанс для отдельных гармоник, т. е. каждый раз, когда L приближается к значению $L = \frac{1}{k^2\omega^2 C}$, соответствующая гармоника тока порядка k становится равной $I_k = \frac{U_k}{r}$ и увеличивает значение тока, что дает пик в кривой резонанса.

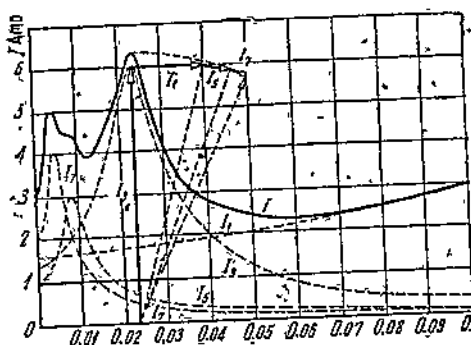
Задача 43. Дана кривая напряжения

$$u = 141 \sin \omega t + 42,5 \sin 3\omega t + 21,2 \sin 5\omega t + 28,3 \sin 7\omega t$$

(сдвиг фаз здесь не играет роли) с основной частотой $f = 50$ Hz. Цепь имеет сопротивление $r = 5 \Omega$ и емкость $C = 50 \mu\text{F}$. Определить зависимость эффективных значений тока от включенной в цепь индуктивности, когда L меняется от 0 до 0,3 H.

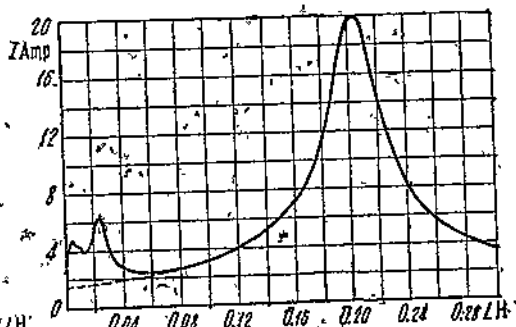
Решение. Строим зависимость тока от индуктивности, когда действует в отдельности основная гармоника напряжения, а затем остальные гармоники (фиг. 186 и 187). Искомые значения тока будут равны корню квадратному из квадратов соответствующих ординат отдельных кривых. Этот корень можно

найти геометрическим построением. Сначала складывают под прямым углом I_2 и I_1 , затем перпендикулярно к гипотенузе $\sqrt{I_1^2 + I_2^2}$ откладывают I_3 , замыкающая будет равна $\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}$, а перпендикулярно к этой замыкающей откладывают I_4 . Результат представлен (на фиг. 186 и 187) в виде резонансной



Фиг. 186. Нахождение действующего значения тока при переменном L .

кривой для малых значений L в большом масштабе и для больших значений L в уменьшенном масштабе.



Фиг. 187. Кривая эффективного значения тока в цепи при переменном L .

67. Мощность несинусоидальных токов

Мощность переменного тока произвольной формы определяется как средняя мощность за целый период или при симметричной форме кривой — за полпериода:

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} ui \, dt.$$

Подставим вместо u и i их выражения в виде тригонометрических рядов:

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T [U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \\ + U_5 \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots] [I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + \\ + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) + I_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5 - \varphi_5) + \dots] dt.$$

После перемножения интеграл разбивается на сумму интегралов. Из них первый равен

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0;$$

часть интегралов содержит произведение синусов с аргументами одного и того же периода, как, например,

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) dt = \frac{U_{1m} I_{1m}}{2} \cos \varphi_1 = \\ = U_1 I_1 \cos \varphi_1,$$

или

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_{3m} \sin(3\omega t + \varphi_3) I_{3m} \sin(3\omega t + \varphi_3 - \varphi_3) dt = \frac{U_{3m} I_{3m}}{2} \cos \varphi_3 = \\ = U_3 I_3 \cos \varphi_3,$$

и наконец, остальные интегралы содержат или синусы периодических аргументов или произведения синусов с аргументами разных периодов, например,

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1 - \varphi_1) dt = 0,$$

или

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_1 \sin(\omega t + \varphi_1) I_{3m} \sin(3\omega t + \varphi_3 - \varphi_3) dt = 0.$$

(вся последняя группа интегралов равна нулю). Поэтому средняя мощность равна

$$P_a = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + U_5 I_5 \cos \varphi_5 + \dots \quad (67,1)$$

Отсюда следует, что средняя мощность при несинусоидальных напряжениях и токе равна сумме средних мощностей, которые получились бы, если бы каждая гармоника напряжения действовала одновременно только с гармоникой тока того же периода.

Если перемножить эффективные значения напряжения и тока, то произведение это UI , вообще говоря, будет больше действительной мощности P_a . Лишь в частном случае, если для любого момента времени отношение напряжения к току будет равняться одной и той же постоянной величине, мы будем иметь

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = UI,$$

что нетрудно доказать, если подставить $u = \text{const} \cdot i = \tau i$.

В остальных же случаях мы всегда будем иметь, что

$$\frac{P_a}{UI} < 1.$$

Отношение $\frac{P_a}{UI}$ называют коэффициентом мощности и приравнивают его косинусу некоторого воображаемого угла φ :

$$\frac{P_a}{UI} = \cos \varphi. \quad (67,2)$$

Этот угол представлял бы собой сдвиг фаз между такими синусоидальными напряжениями и токами, эффективные значения которых соответственно равнялись бы эффективным значениям данных (несинусоидальных) напряжения и тока и которые давали бы такую же мощность как и данные (несинусоидальные) напряжение и ток.

68. Активная и реактивная мощности несинусоидальных токов

Можно, показать, как это сделал Фризе („ETZ“, 1932, Heft 25, 26 и 29), что и при несинусоидальных токах, как и для синусоидального тока, или напряжения или ток можно разложить на две слагающие: активную и реактивную, которые находятся в квадратуре (сумма квадратов слагающих равна квадрату эффективного значения) независимо от характера приемника энергии.

Пусть непосредственные измерения при помощи вольтметра, амперметра и ваттметра дали для данных несинусоидальных напряжения и тока эффективные значения напряжения и тока, а также среднюю мощность

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}; P_a = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt. \quad (68,1)$$

Разделим активную мощность P_a на квадрат эффективного значения тока и обозначим частное через r :

$$\frac{P_a}{I^2} = r; P_a = rI^2. \quad (68,2)$$

r имеет размерность сопротивления, хотя в действительности в приемнике может и не соблюдаться пропорциональность напряжения и тока (например, вольтова дуга). Затем разложим мгновенное значение внешнего напряжения на две слагающих — одну так называемую активную, которая равна мгновенному значению тока, умноженному на вышеуказанную величину r ,

$$u_a = r i, \quad (68,3)$$

и другую, которую мы будем называть реактивной слагающей и которая равна разности

$$u_r = u - u_a = u - ri, \\ u = u_a + u_r. \quad (68,4)$$

Если мы в выражении мощности заменим u через его слагающие

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt = \frac{1}{T} \int_0^T u_a i dt + \frac{1}{T} \int_0^T u_r i dt = \frac{1}{T} \int_0^T ri^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T u_r i dt = \\ = rI^2 + \frac{1}{T} \int_0^T u_r i dt = P_a + \frac{1}{T} \int_0^T u_r i dt, \quad (68,5)$$

то получим, что вторая слагающая не дает мощности, т. е. среднее значение мгновенных реактивных мощностей равно нулю.

Из этого следует, что среднее значение произведений мгновенных значений активных и реактивных слагающих напряжения равно нулю

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_r i dt = \frac{1}{rT} \int_0^T u_r u_a dt = 0 \text{ или } \frac{1}{T} \int_0^T u_a u_r dt = 0. \quad (68,6)$$

Выразим теперь квадрат эффективного значения внешнего напряжения через его слагающие:

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u_a + u_r)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T u_a^2 dt + \frac{2}{T} \int_0^T u_a u_r dt + \\ + \frac{1}{T} \int_0^T u_r^2 dt = U_a^2 + U_r^2. \quad (68,7)$$

Первый интеграл представляет собой квадрат активной слагающей внешнего напряжения; обозначим ее через U_a :

$$U_a^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u_a^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T r^2 i^2 dt = r^2 I^2 = \frac{(rI)^2}{I^2} = \frac{P_a^2}{I^2}, \quad (68,8)$$

произведение U_a на I дает активную мощность P_a .

Второй интеграл равен нулю [уравнение (68,6)], а третий интеграл представляет собой квадрат эффективного значения реактивной слагающей напряжения

$$U_r^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u_r^2 dt. \quad (68,9)$$

Из уравнения (68,7) следует, что

$$U^2 = U_a^2 + U_r^2, \text{ или } U_r = \sqrt{U^2 - U_a^2}. \quad (68,10)$$

Таким образом мы получили, что для цепи с несинусоидальными, как и для цепей с синусоидальными напряжениями, эффективные значения активного и реактивного напряжений находятся в квадратуре.

Если построить диаграмму в виде прямоугольного треугольника (фиг. 188), отложив

$$U_a = m_U \cdot OU_a; U_r = m_U \cdot OU_r = m_U \cdot U_a U$$

$$\text{и} \quad U = m_U \cdot OU,$$

то мы получим такой же прямоугольный треугольник, как и для обыкновенного синусоидального тока. Если все длины сторон треугольника напряжений умножить на эффективное значение тока, то мы в некотором масштабе получим треугольник мощностей;

$$P_a \triangleq U_a I = m_P \cdot OP_a; P_r = U_r I = m_P \cdot OP_r$$

$$\text{и} \quad P_i = UI = m_P \cdot OP_i$$

P_a представляет собой активную мощность, P_i — кажущуюся мощность, а P_r — реактивную мощность. В этой диаграмме коэффициент мощности представлен косинусом угла между активной слагающей напряжения и полным напряжением:

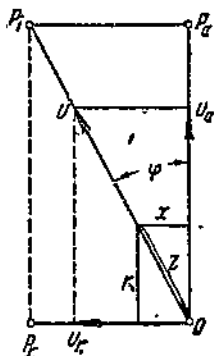
$$\frac{P_a}{P_i} = \frac{U_a I}{UI} = \frac{U_a}{U} = \cos \varphi. \quad (68,11)$$

Реактивное напряжение U_r и мощность P_r играют такую же роль, как реактивное напряжение и мощность при синусоидальном токе: они являются мерой необходимого повышения напряжения сети, для того чтобы при заданном токе получить необходимую активную мощность P_a , а также мерой увеличения расчетной мощности источника энергии.

Стороны треугольника напряжений можно было бы также разделить на значение тока, тогда мы получили бы треугольник сопротивлений.

Аналогичным образом, когда для цепи с несинусоидальными напряжением и током задают эффективные значения напряжения

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}, \text{ тока } I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$



Фиг. 188. Треугольники напряжений, мощностей и эквивалентных сопротивлений для несинусоидального тока.

и среднюю (активную) мощность $P_a = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt$, можно, оставляя неизменным напряжение, разложить ток на две слагающие: активную и реактивную. Для этого мы вводим некоторую фиктивную проводимость

$$g = \frac{P_a}{U^2} \text{ или } P_a = gU^2, \quad (68,12)$$

и разбиваем мгновенное значение тока на две слагающих, проходящих как бы через два параллельных элемента, из которых одна равна произведению мгновенного значения напряжения u на фиктивную проводимость g :

$$i_a = gu \quad (68,13)$$

ее мы будем называть активной слагающей тока, а другая равна разности между действительным значением тока и воображаемой активной слагающей тока

$$i_r = i - i_a, \quad (68,14)$$

Эту слагающую мы будем называть реактивной слагающей тока.

Если мы теперь вместо i в выражение для мощности подставим $i_a + i_r$,

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T u (i_a + i_r) \, dt = \frac{g}{T} \int_0^T u^2 \, dt + \frac{1}{T} \int_0^T ui_r \, dt = P_a + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T ui_r \, dt, \end{aligned} \quad (68,15)$$

то увидим, что средняя мощность первой слагающей как раз равна средней (активной) мощности переменного тока:

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T ui_a \, dt = \frac{g}{T} \int_0^T u^2 \, dt = gU^2, \quad (68,16)$$

и эффективное значение этой слагающей равно

$$I_a = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_a^2 \, dt} = g \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 \, dt} = gU = \frac{gU^2}{U} = \frac{P_a}{U}$$

(средней мощности, деленной на эффективное значение напряжения).

Другая слагающая ничего не прибавляет и не убавляет в значений средней мощности [следует из уравнения (68,15)]

$$\frac{1}{T} \int_0^T ui_r \, dt = 0. \quad (68,17)$$

Тем не менее, она увеличивает кажущуюся мощность, на которую должен быть рассчитан источник тока. Чтобы найти эффективное значение реактивной слагающей тока, выразим эффективное значение действительного тока через его слагающие

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T (i_a + i_r)^2 \, dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T i_a^2 \, dt + \frac{2}{T} \int_0^T i_a i_r \, dt + \frac{1}{T} \int_0^T i_r^2 \, dt. \end{aligned}$$

Первый интеграл равен квадрату эффективного значения активной слагающей тока I_a^2 , третий — эффективному значению реактивной слагающей I_r^2 , а средний интеграл равен нулю:

$$\frac{2}{T} \int_0^T i_a i_r dt = \frac{2}{T} g \int_0^T \frac{i_a}{g} i_r dt = \frac{2g}{T} \int_0^T u i_r dt = 0.$$

Отсюда мы видим, что активная и реактивная слагающие тока находятся в квадратуре и что

$$I^2 = I_a^2 + I_r^2, \text{ или } I_r = \sqrt{I^2 - I_a^2} \quad (68,18)$$

также, как и для синусоидального переменного тока.

Мы можем построить треугольник токов (фиг. 189), тогда косинус угла, образуемого активной слагающей тока, которую мы откладываем по одному направлению с эффективным значением напряжения U и направлением вектора тока, равен как раз коэффициенту мощности:

$$\frac{I_a}{I} = \frac{UI_a}{UI} = \frac{P_a}{P_i} = \cos \varphi. \quad (68,19)$$

Если мы все стороны треугольника токов разделим на эффективное значение напряжения U , то получим треугольник, который соответствует треугольнику проводимостей цепи, через которую проходит обыкновенный синусоидальный ток:

$$g = \frac{U}{I_a}; \quad b = \frac{U}{I_r}; \quad y = \frac{U}{I}; \quad y^2 = g^2 + b^2 \text{ и } Y = g - jb.$$

Если же мы все стороны треугольника тока умножим на эффективное значение напряжения, то получим треугольник мощностей:

$$(IU)^2 = (I_a U)^2 + (I_r U)^2 \\ P_i^2 = P_a^2 + P_r^2. \quad (68,20)$$

Задача 44. Дан источник постоянного тока с бесконечно малым внутренним сопротивлением, дающий напряжение $U = 120 \text{ В}$ и работающий через прерыватель без потерь. Прерыватель при каждом обороте на 0,4 времени замыкает и на 0,6 времени размыкает цепь без индуктивности, но имеющую сопротивление $r = 10 \text{ }\Omega$. Определить эффективные значения тока, напряжения (активного) на зажимах сопротивления, реактивного напряжения на зажимах прерывателя и кажущуюся мощность, на которую должен быть рассчитан источник тока.

Решение. Кривая тока будет иметь прямоугольную форму с высотой

$$I_m = \frac{U}{r} = \frac{120}{10} \text{ А} = 12 \text{ А}.$$

Эффективное значение тока будет равно

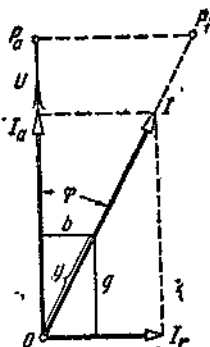
$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 dt} = I_m \sqrt{0,4} = 12 \sqrt{0,4} \text{ А} = 7,6 \text{ А}.$$

Напряжение на зажимах сопротивления

$$U_a = rI = 10 \cdot 7,6 \text{ В} = 76 \text{ В}.$$

Активная мощность, поглощаемая сопротивлением,

$$P_a = rI^2 = 580 \text{ Вт}.$$



Фиг. 189. Треугольники слагающих тока и проводимостей для несинусоидального тока.

Напряжение на зажимах прерывателя

$$U_r = \sqrt{U^2 - U_a^2} = \sqrt{120^2 - 76^2} \text{ В} = 93 \text{ В}.$$

Реактивная мощность, потребляемая прерывателем,

$$P_r = U_r I = 93 \cdot 7,6 \text{ Вт} = 705 \text{ Вт}.$$

Мощность, на которую должен быть рассчитан источник тока, составит

$$P_i = UI = 120 \cdot 7,6 \text{ Вт} = 912 \text{ Вт},$$

в то время как отдаваемая мощность равна $P_a = 580 \text{ Вт}$. Несмотря на то, что мгновенное значение реактивной мощности всегда равно нулю, все же реактивная мощность, равная

$$P_r = \sqrt{P_i^2 - P_a^2} = \sqrt{912^2 - 580^2} \text{ Вт} = 705 \text{ Вт},$$

больше даже, чем активная. Коэффициент мощности в этой цепи будет равен

$$\frac{P_a}{P_i} = \frac{U_a}{U} = \cos \varphi = \frac{580}{912} = 0,636.$$

На фиг. 190 показаны кривые напряжений, тока и мощностей для обоих элементов цепи.

Задача 45. Синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t = 141 \sin \omega t$

приложено к приемнику энергии, состоящему из активного сопротивления $r = 10 \text{ }\Omega$ и источника постоянного тока с э. д. с. $E_0 = 50 \text{ В}$. Определить активную и реактивную составляющие тока, а также активную и реактивную мощности. Эффективное значение внешнего напряжения равно

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В}.$$

Решение. Квадрат эффективного значения тока равен

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{u - E_0}{r} \right)^2 dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{U^2}{r} \int_0^T \frac{u^2}{r^2} dt - \frac{2}{T} \int_0^T \frac{E_0 U_m \sin \omega t}{r^2} dt + \\ + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E_0^2}{r^2} dt = \frac{U^2}{r^2} + \frac{E_0^2}{r^2} = \left(\frac{100}{10} \right)^2 + \left(\frac{50}{10} \right)^2 \text{ А}^2 = 125 \text{ А}^2; I = 11,2 \text{ А};$$

мощность, получаемая из сети, равна

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u(u - E_0)}{r} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u^2}{r} dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u E_0}{r} dt = \\ = \frac{U^2}{r} - 0 = \frac{100^2}{10} \text{ Вт} = 1000 \text{ Вт};$$

кажущаяся мощность составит

$$P_i = UI = 100 \cdot 11,2 \text{ Вт} = 1120 \text{ Вт};$$

$$\cos \varphi = \frac{P_a}{P_i} = \frac{1000}{1120} = 0,895;$$

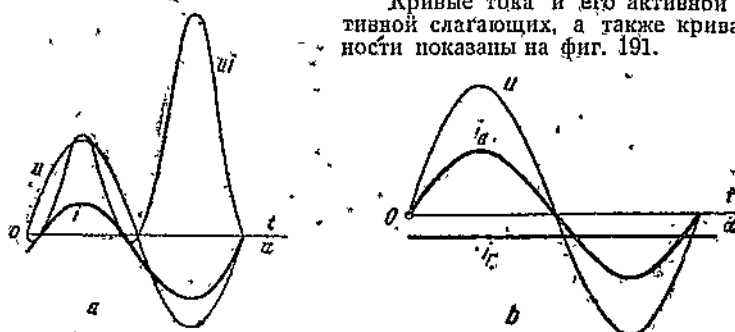
$$I_a = I \cos \varphi = 11,2 \cdot 0,895 \text{ А} = 10 \text{ А};$$

$$I_r = \sqrt{I^2 - I_a^2} = \sqrt{11,2^2 - 10^2} \text{ А} = 5 \text{ А};$$

реактивная мощность равна

$$P_r = UI_r = 100 \cdot 5 \text{ W} = 500 \text{ W}.$$

Кривые тока и его активной и реактивной составляющих, а также кривая мощности показаны на фиг. 191.



Фиг. 191. Кривые мощности, тока и его активной и реактивной составляющих в задаче 45.

69. Мощность искажения.

Когда и напряжение и ток меняются по несинусоидальным кривым, то, если эти кривые разложены на гармоники и известны эффективные значения соответствующих гармоник:

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_k^2 + \dots + U_m^2 + \dots,$$

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_k^2 + \dots + I_m^2 + \dots,$$

квадрат кажущейся мощности можно выразить в виде

$$\begin{aligned} U^2 I^2 &= U_1^2 I_1^2 + U_2^2 I_2^2 + \dots + U_k^2 I_k^2 + U_m^2 I_m^2 + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{h=\infty} U_k^2 I_k^2 + \sum_{\substack{h=1 \\ m \neq h}}^{\infty} U_k^2 I_m^2. \end{aligned} \quad (69,1)$$

Каждую гармонику тока можно разложить на две составляющие

$$I_k \cos \varphi_k \text{ и } I_k \sin \varphi_k \text{ (или } I_m \cos \varphi_m \text{ и } I_m \sin \varphi_m),$$

где φ_k (или φ_m) — углы сдвига между током и напряжением одной и той же гармоники. Тогда $U^2 I^2$ может быть выражено следующим образом:

$$\begin{aligned} U^2 I^2 &= U_1^2 I_1^2 \cos^2 \varphi_1 + U_2^2 I_2^2 \cos^2 \varphi_2 + 2U_1 I_1 U_2 I_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \\ &- 2U_1 I_1 U_2 I_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \dots + U_1^2 I_1^2 \sin^2 \varphi_1 + U_2^2 I_2^2 \sin^2 \varphi_2 + \\ &+ 2U_1 I_1 U_2 I_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - 2U_1 I_1 U_2 I_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \dots + U_1^2 I_1^2 + \\ &+ U_2^2 I_2^2 + \dots = (U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots)^2 + (U_1 I_1 \sin \varphi_1 + \\ &+ U_2 I_2 \sin \varphi_2 + \dots)^2 + (U_1^2 I_2^2 + U_2^2 I_1^2 + \dots) - [2U_1 I_2 U_2 I_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \dots] = \\ &= \left(\sum U_k I_k \cos \varphi_k \right)^2 + \left(\sum U_k I_k \sin \varphi_k \right)^2 + \\ &+ \sum [U_k^2 I_m^2 + U_m^2 I_k^2 - 2U_k I_m U_m I_k \cos(\varphi_k - \varphi_m)], \end{aligned} \quad (69,2)$$

Первый член представляет собой квадрат суммы активных мощностей всех гармоник, это есть квадрат активной мощности всей цепи, так как

$$P_a = \sum U_k I_k \cos \varphi_k, \quad (69,3)$$

Второй член представляет собой квадрат суммы реактивных мощностей всех гармоник, отдельно взятых, так как

$$P_r' = \sum U_h I_h \sin \varphi_h \quad (69,4)$$

и наконец, третий член, имеющий также размерность квадрата мощности, содержит произведения напряжений и токов различных гармоник:

$$P_u^2 = \sum [U_h^2 I_m^2 + U_m^2 I_h^2 - 2U_h I_m U_m I_h \cos(\varphi_h - \varphi_m)] \quad (69,5)$$

Эту последнюю мощность называют мощностью искажения.

Средние значения мгновенной реактивной мощности и мощности искажения за время одного периода равны нулю. Приведенные здесь значения P_r' и P_u представляют собой средние квадратичные значения мощности, которые отличны от нуля.

Таким образом если напряжение и ток раскладывать на гармоники, то мы получаем, что квадрат кажущейся мощности складывается из квадратов трех мощностей:

$$P_i^2 = U^2 I^2 = P_a^2 + P_r'^2 + P_u^2 \quad (69,6)$$

Мощность искажения будет отсутствовать в том случае, если для двух любых (разных) гармоник напряжения и тока

$$\varphi_h = \varphi_m$$

и

$$U_h I_m = U_m I_h, \text{ или } \frac{U_h}{I_h} = \frac{U_m}{I_m},$$

т. е. когда для каждой гармоники будет иметь место один и тот же сдвиг фаз и когда отношение эффективных значений напряжения и тока для всех гармоник будет иметь одно и то же значение. А это осуществимо только тогда, когда в цепи имеется лишь одно активное сопротивление.

Указанный выше способ трактовки кажущейся и активной мощностей применяется в случаях, когда напряжение изменяется по синусоиде с основной частотой, а ток имеет несинусоидальную форму, например, в установках с ртутными выпрямителями, напряжение которых регулируется при помощи сеток.

В этом случае

$$U^2 = U_1^2,$$

а

$$\begin{aligned} I^2 &= I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots, \\ P_i^2 &= U^2 I^2 = U_1^2 (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots) = \\ &= U_1^2 I_1^2 \cos^2 \varphi_1 + U_1^2 I_1^2 \sin^2 \varphi_1 + U_1^2 (I_2^2 + I_3^2 + \dots) = \\ &= P_a^2 + P_r'^2 + P_u^2 \end{aligned} \quad (69,7)$$

В то время как активная мощность $U_1 I_1 \cos \varphi_1$ и чисто реактивная мощность $U_1 I_1 \sin \varphi_1$ могут быть измерены активными и реактивными ваттметрами, мощность искажения непосредственно измерена быть не может (так как среднее значение произведения двух синусоид разной частоты равно нулю), а может быть вычислена на основании формулы

$$P_u = \sqrt{P_i^2 - P_a^2 - P_r'^2} \quad (69,8)$$

70. Последовательное и параллельное соединения при несинусоидальных токах

При последовательном соединении общая активная мощность всей цепи P_a должна равняться сумме активных мощностей $P_a', P_a'', P_a''', \dots$ отдельных участков цепи:

$$P_a = P_a' + P_a'' + P_a''' + \dots \quad (70,1)$$

Пусть $U_a, U'_a, U''_a, \dots$ — эффективные значения активных слагающих напряжения всей цепи и у зажимов отдельных частей; $\cos \varphi, \cos \varphi', \cos \varphi'', \cos \varphi''', \dots$ — коэффициенты мощности всей цепи и отдельных частей цепи, которые мы приравняем косинусам некоторых фиктивных углов. Тогда

$$UI \cos \varphi = U'I \cos \varphi' + U''I \cos \varphi'' + U'''I \cos \varphi''' + \dots,$$

или
$$U \cos \varphi = U' \cos \varphi' + U'' \cos \varphi'' + U''' \cos \varphi''' + \dots \quad (70,2)$$

Поэтому, если мы для всей цепи и для отдельных ее частей построим треугольники напряжений, то сумма тех катетов, которые совпадают с направлением тока, будет всегда равна активной слагающей внешнего напряжения в том же масштабе.

Что касается реактивной слагающей внешнего напряжения, то она не может быть выражена суммой реактивных слагающих отдельных гармоник.

Предположим, что цепь состоит из двух последовательно соединенных частей. Разлагая внешнее напряжение и напряжения на зажимах каждой части на две слагающих, мы ставим условие, чтобы мощность выражалась только активной слагающей, а средняя мощность, соответствующая реактивной слагающей, равнялась нулю, или, как это вытекает из уравнения (68,6), среднее значение мгновенных значений напряжений должно равняться нулю.

Если $u = u_a + u_r$; $u' = u'_a + u'_r$; $u'' = u''_a + u''_r$ — мгновенные значения и их активные и реактивные слагающие всего напряжения и напряжений каждой части цепи, то они должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_a u_r dt = 0; \quad \frac{1}{T} \int_0^T u'_a u'_r dt = 0; \quad \frac{1}{T} \int_0^T u''_a u''_r dt = 0; \quad (70,3)$$

при этих условиях мы для всей цепи и для каждой ее части можем построить эквивалентные треугольники напряжений.

Эти уравнения и соответствующие треугольники будут совместимы лишь при условии полного подобия обеих частей цепи. Так как в данном случае

$$u = u' + u'' = u_a + u_r = u'_a + u'_r + u''_a + u''_r,$$

то, если

$$u_a = u'_a + u''_a \quad \text{и} \quad u_r = u'_r + u''_r,$$

мы должны получить

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_a u_r dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u'_a u'_r + u'_a u''_r + u''_a u'_r + u''_a u''_r) dt = 0.$$

Разбивая этот интеграл на отдельные части мы на основании уравнения (70,3) находим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (u'_a u'_r + u'_a u''_r) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T u'_a u'_r \left(\frac{u''_r}{u'_r} + \frac{u''_a}{u'_a} \right) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T u'_a u''_r \left(\frac{u'_a}{u'_r} + \frac{u'_r}{u''_r} \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы уравнения были совместимы, необходимо, чтобы отношения

$$\frac{u''_a}{u'_a} = k_1; \quad \frac{u''_r}{u'_r} = k_2,$$

каждое порознь, равнялись постоянной величине и не зависели от времени, т. е. чтобы отношение мгновенных значений как активных слагающих, так и реактивных слагающих напряжений всех составных частей цепи не зависели

от времени. Это нас приводит к тому, что если составные части цепи состоят из неизменных элементов

$r', r'', r''', \dots, L', L'', L''', \dots, C', C'', C''', \dots$ причём

$$\frac{r''}{r'} = \frac{r'''}{r''} = \dots = \frac{L''}{L'} = \frac{L'''}{L''} = \dots = \frac{1}{C''} = \dots = \frac{1}{C'} = \dots = \frac{k\omega L'' - \frac{1}{k\omega C''}}{k\omega L' - \frac{1}{k\omega C'}} = \dots = K,$$

то только тогда, когда активные и реактивные сопротивления отдельных частей цепи для всех гармоник находятся в постоянном отношении, мы можем складывать и другие катеты треугольников. В этом случае реактивное напряжение всей цепи будет равно сумме реактивных напряжений отдельных частей.

При синусоидальных токах условие постоянства отношений активных и реактивных напряжений даже при непропорциональности r , L и C всегда соблюдено:

$$u_a : u_a'' : u_a''' \dots = r' : r'' : r''' \dots$$

и

$$u_r : u_r'' : u_r''' \dots = \left(\omega L' - \frac{1}{\omega C'}\right) : \left(\omega L'' - \frac{1}{\omega C''}\right) : \left(\omega L''' - \frac{1}{\omega C'''}\right) \dots$$

и поэтому в этом случае условия равенства коэффициентов мощности не требуется.

При параллельном соединении во всех ветвях действует одно и то же напряжение, и из уравнения мощностей следует, что

$$P_a = UI \cos \varphi = UI' \cos \varphi' + UI'' \cos \varphi'' + UI''' \cos \varphi''' + \dots$$

т. е.

$$I \cos \varphi = I' \cos \varphi' + I'' \cos \varphi'' + I''' \cos \varphi''' + \dots$$

или

$$I_a = I_a' + I_a'' + I_a''' + \dots \quad (70.4)$$

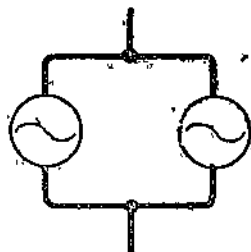
(активная слагающая суммарного тока равна сумме активных слагающих токов в отдельных ветвях).

Что касается реактивных слагающих токов, то и здесь, как правило, реактивная слагающая суммарного тока не будет равна алгебраической сумме реактивных слагающих отдельных токов. Повторяя те же рассуждения, что и выше, но заменяя u , u_a , i_r через i , i_a , i_r , можно

показать, что только тогда сумма реактивных слагающих отдельных токов будет равняться реактивной слагающей в неразветвленной цепи, когда активные и реактивные слагающие токи будут в любой момент находиться в постоянном отношении: $i_a' : i_a'' = i_r' : i_r'' = K$, или, что то же самое, когда отношения активных и реактивных проводимостей равны между собой: $g' : g'' = b' : b''$.

Когда в ветвях нет ёмкости, то высшие гармоники тока, вообще говоря, невелики, и в этом случае сложение реактивных слагающих токов и приравнивание их реактивной слагающей суммарного тока (т. е. сложение треугольников токов) не влечёт за собой больших ошибок.

Фиг. 192. Параллельное соединение генераторов.



Дело обстоит сложнее тогда, когда имеется несколько параллельных ветвей, в которых действуют напряжения с разными формами кривых, например, при параллельной работе генераторов (фиг. 192). При одинаковых эффективных значениях ε , д. с. даже при совпадении фаз основных синусоид между ветвями могут получаться весьма большие так называемые выравнивающие токи благодаря взаимной неуравновешенности. Ясно, что при разных формах кривых вследствие наличия высших гармоник с разными сдвигами ε , д. с. никогда не могут быть приведены к полному совпадению фаз и что сумма реактивных токов генераторов будет в большей или меньшей мере отличаться от реактивного тока во внешней цепи.

71. Влияние формы кривой э. д. с. на форму кривой изменения магнитного потока

Зависимость между э. д. с., наводимой в какой-нибудь катушке, и величиной магнитного потока, проходящего в соответствующий момент через эту катушку, выражается соотношением

$$e = - \frac{d(w\Phi)}{dt} = -w \frac{d\Phi}{dt} \quad (71,1)$$

Проследим на ряде частных примеров, как будет изменяться магнитный поток внутри катушки, когда кривая наводимой им э. д. с. имеет ту или иную форму.

1. Электродвижущая сила в течение одного полупериода постоянна:

$$e = E_m = \text{const};$$

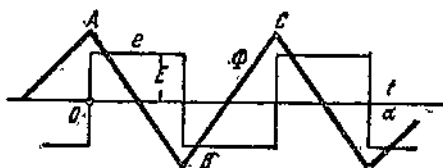
в течение следующего полупериода э. д. с. имеет ту же величину, но направлена в противоположную сторону. Графически такая э. д. с. представлена на фиг. 193.

Из формулы (71,1) следует, что

$$d\Phi = - \frac{e}{w} dt = - \frac{E_m}{w} dt.$$

Интегрирование этого уравнения дает $\Phi = \text{const} - \frac{E_m}{w} t$.

Магнитный поток достигает своего максимального или минимального значения, когда э. д. с. равна нулю, так как в эти моменты $\frac{d\Phi}{dt} = 0$. На основании этого, приравнявая t нулю, получаем, что $\Phi_m = \text{const}$. С другой стороны, среднее значение э. д. с. за полпериода, в течение которого она имеет одно и то же направление, выражается через



Фиг. 193. Кривая изменения магнитного потока по времени при заданной форме кривой э. д. с.

$$E_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(-w \frac{d\Phi}{dt} \right) dt = -2fw \int_{\Phi_{min}}^{\Phi_{max}} d\Phi = 2fw (\Phi_{max} - \Phi_{min}).$$

Полагая, что магнитный поток за полпериода колеблется между двумя противоположными, но равными значениями, т. е. что

$$\Phi_{max} = \Phi_m \text{ и } \Phi_{min} = -\Phi_m,$$

находим, что

$$E_{med} = 4fw\Phi_m.$$

Это соотношение имеет место независимо от формы кривой э. д. с., лишь бы э. д. с. в течение полупериода не меняла знака.

В нашем случае $E_{med} = E_m$, а потому $const = \Phi_m = \frac{E_m}{4fw}$ магнитный поток изменяется согласно уравнению

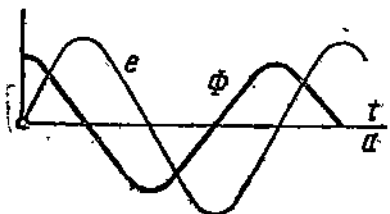
$$\Phi = \frac{E_m}{4fw} - \frac{E_m}{w} t = \frac{E_m}{4fw} (1 - 4ft),$$

или $\Phi = \Phi_m \left(1 - \frac{4t}{T}\right)$.

Мы видим, что магнитный поток изменяется по некоторой прямой, изображенной на фиг. 193 линией AB . В следующем полупериоде кривая изменения магнитного потока представляется прямой BC и т. д. Кривая магнитного потока имеет вид ломаной линии.

Так как в рассматриваемом случае максимальное, эффективное и среднее значения э. д. с. равны между собой, то отношение эффективного значения к среднему, представляющее собой коэффициент формы

кривой, равно единице: $k = \frac{E}{E_{cp}} = 1$.



Фиг. 194. Кривая изменения магнитного потока при синусоидальном изменении э. д. с.

Для характеристики формы кривой вводят иногда еще второй коэффициент, так называемый коэффициент амплитуды, определяя его как отношение максимального значения к эффективному. Для прямоугольной прямой коэффициент амплитуды также будет равен единице:

$$k_m = \frac{E_m}{E} = 1.$$

2. При синусоидальном изменении э. д. с. $e = E_m \sin \omega t$ кривая изменения магнитного потока в зависимости от времени, как это нами было доказано раньше, представляется также синусоидой (фиг. 194):

$$\Phi = \Phi_m \sin(\omega t + 90^\circ);$$

$$E_m = \omega w \Phi_m = 2\pi f w \Phi_m;$$

$$E_{med} = \frac{2}{\pi} \omega w \Phi_m = 4fw \Phi_m;$$

$$\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega w \Phi_m = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} fw \Phi_m = 4,44 fw \Phi_m;$$

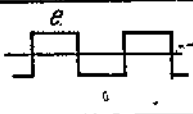
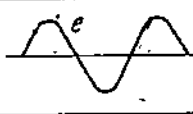
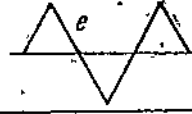
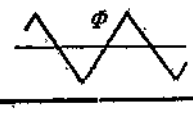
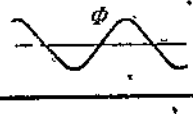
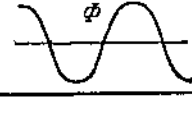
$$k = \frac{E}{E_{med}} = \frac{4,44}{4} = 1,11; \quad (71,2)$$

$$k_m = \frac{E_m}{E} = \sqrt{2} = 1,414. \quad (71,3)$$

3. Предположим теперь, что кривая изменения э. д. с. представляется в виде ломаной $OBCD$ (фиг. 195), которая в пределах четверти периода может быть выражена уравнением

$$e = E_m \frac{t}{\frac{T}{4}} = \frac{4E_m t}{T} = w \frac{d\Phi}{dt},$$

Сравнивая кривые фиг. 193, 194 и 195, находим, что тупым кривым э. д. с. соответствуют острые кривые изменения магнитного потока, и наоборот, чем более острую форму имеет кривая э. д. с., тем более тупой получается кривая изменения магнитного потока. Из приведенной ниже сводной таблицы видно, что, чем острее кривая э. д. с., тем больше для нее коэффициент формы кривой k и что при одном и том же эффективном значении э. д. с., имеющей более острую кривую, соответствует меньший максимальный магнитный поток.

Кривая э. д. с.			
Кривая магнитного потока			
$E_m =$	$4f \text{ в } \Phi_m$	$6,28f \text{ в } \Phi_m$	$8f \text{ в } \Phi_m$
$E_{cp} =$	$4f \text{ в } \Phi_m$	$4f \text{ в } \Phi_m$	$4f \text{ в } \Phi_m$
$E =$	$4f \text{ в } \Phi_m$	$4,44f \text{ в } \Phi_m$	$4,62f \text{ в } \Phi_m$
$k =$	1	1,11	1,155
$k_m =$	1	1,414	1,732

Для целей освещения при ненормально малом числе периодов тупая кривая была бы выгоднее, так как мгновенное значение мощности колебалось бы в меньших пределах, и свет был бы ровнее. При передаче энергии, когда в сети имеются трансформаторы, напряжения с острой кривой дают меньшие потери в железе, так как в железе при тупой кривой магнитного потока максимальная индукция будет меньше. Но с другой стороны, более острые кривые при одном и том же эффективном значении э. д. с. дают большие величины для максимальных значений э. д. с., а от величины последних зависит прочность изоляции как между отдельными частями обмотки, так и в кабелях, подводящих ток. Мы здесь имеем факторы, взаимно противоречащие друг другу, а потому, принимая еще во внимание наличие высших гармоник, которые всегда имеются, когда кривая отстает от синусоиды, и которые вызывают дополнительные потери и могут повлечь за собой нежелательное явление резонанса, на практике всегда стремятся к тому, чтобы кривая э. д. с. по возможности ближе подходила к синусоиде.

72. Высшие гармоники в трехфазных системах

Если фазовые напряжения в трехфазной системе отступают от синусоиды, то, учитывая, что напряжения двух смежных фаз сдвинуты в своих фазах по времени на одну треть периода $\frac{T}{3}$ и что $\omega T = 2\pi$,

мгновенные значения напряжений в фазах A , B и C могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U_A &= U_{1m} \sin \omega t + U_{3m} \sin (3\omega t + \psi_3) + U_{5m} \sin (5\omega t + \psi_5) + \\
 &\quad + U_{7m} \sin (7\omega t + \psi_7) + \dots \\
 U_B &= U_{1m} \sin \omega \left(t - \frac{T}{3} \right) + U_{3m} \sin \left[3\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) + \psi_3 \right] + \\
 &\quad + U_{5m} \sin \left[5\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) + \psi_5 \right] + U_{7m} \sin \left[7\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) + \psi_7 \right] + \dots = \\
 &= U_{1m} \sin \omega (t - 120^\circ) + U_{3m} \sin (3\omega t + \psi_3) + U_{5m} \sin (5\omega t - 240^\circ + \psi_5) + \\
 &\quad + U_{7m} \sin (7\omega t - 120^\circ + \psi_7) + \dots \\
 U_C &= U_{1m} \sin \omega \left(t - \frac{2T}{3} \right) + U_{3m} \sin \left[3\omega \left(t - \frac{2T}{3} \right) + \psi_3 \right] + \\
 &\quad + U_{5m} \sin \left[5\omega \left(t - \frac{2T}{3} \right) + \psi_5 \right] + U_{7m} \sin \left[7\omega \left(t - \frac{2T}{3} \right) + \psi_7 \right] + \dots = \\
 &= U_{1m} \sin (\omega t - 240^\circ) + U_{3m} \sin (3\omega t + \psi_3) + \\
 &\quad + U_{5m} \sin (5\omega t - 120^\circ + \psi_5) + U_{7m} \sin (7\omega t - 240^\circ + \psi_7) + \dots
 \end{aligned}$$

Сравнивая эти напряжения, мы находим, во-первых, что все высшие гармоники, кратные трем (третья, девятая и т. д.), имеют во всех трех фазах в любой момент тождественные значения, затем, если измерять сдвиги фаз в угловых единицах, то остальные высшие гармоники во второй и третьей фазах будут сдвинуты относительно соответствующих гармоник в первой фазе на 120° и 240° , но при этом следует обратить внимание, что в то время как седьмая (тринадцатая и т. д.) гармоники сдвинуты так же, как и основные синусоиды, т. е. во второй фазе эти гармоники сдвинуты на 120° , а в третьей на 240° , пятая (одиннадцатая и т. д.) имеют противоположную последовательность, т. е. эти гармоники в третьей фазе отстают на 120° , а во второй на 240° . Если три фазы соединены в звезду, то линейные напряжения, равные разности напряжений двух смежных фаз, не будут содержать напряжений, кратных трем

$$\begin{aligned}
 U_{AB} &= U_A - U_B = \sqrt{3} U_{1m} \sin (\omega t + 30^\circ) + \\
 &\quad + \sqrt{3} U_{5m} \sin (5\omega t + \psi_5 - 30^\circ) + \sqrt{3} U_{7m} \sin (7\omega t + \psi_7 + 30^\circ) + \\
 &\quad + \sqrt{3} U_{11m} \sin (11\omega t + \psi_{11} - 30^\circ), \\
 U_{BC} &= U_B - U_C = \sqrt{3} U_{1m} \sin (\omega t - 90^\circ) + \\
 &\quad + \sqrt{3} U_{5m} \sin (5\omega t + \psi_5 + 90^\circ) + \sqrt{3} U_{7m} \sin (7\omega t + \psi_7 - 90^\circ) + \\
 &\quad + \sqrt{3} U_{11m} \sin (11\omega t + \psi_{11} - 90^\circ).
 \end{aligned}$$

Так как в линейном (междуфазовом) напряжении пропадают гармоники, кратные трем, то при несинусоидальных напряжениях, отношение линейного напряжения к фазовому будет меньше $\sqrt{3}$.

Эффективное значение фазового напряжения может быть выражено следующим образом через основную синусоиду и высшие гармоники:

$$U_1 = \sqrt{\frac{U_{1m}^2}{2} + \frac{U_{3m}^2}{2} + \frac{U_{5m}^2}{2} + \frac{U_{7m}^2}{2} + \frac{U_{9m}^2}{2} + \frac{U_{11m}^2}{2} \dots} = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_9^2 + U_{11}^2 \dots}, \quad (72,1)$$

а междуфазовое

$$U_{AB} = \sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_{11}^2 \dots} \quad (72,2)$$

Ясно, что $U_{AB} < \sqrt{3} U_1$.

Если в приемнике энергии, соединенном звездой, сопротивление и индуктивность непостоянны в течение периода (например, при холостой работе трехфазных трансформаторов, когда вследствие насыщения железа отношение мгновенных значений магнитного потока и намагничивающего тока меняется в течение периода или когда трехфазная система работает на ртутные выпрямители, то при синусоидальном междуфазовом напряжении в каждой из фаз могут появляться высшие гармоники, а потому в этих случаях токи в проводах (фазовые токи) могут иметь высшие гармоники.

Если трехфазная система, соединенная звездой, имеет нейтральный провод (фиг. 196), то в случае несинусоидальных токов при одинаковой нагрузке всех трех фаз, т. е. когда токи во всех трех фазах имеют одно и то же эффективное значение, в нейтральном проводе ток не будет равен нулю. Ток в нейтральном проводе должен равняться

Фиг. 196. Трехфазная система, соединенная в звезду.

сумме токов трех фаз. Как основные синусоиды, так и все высшие гармонические токи всех трех фаз будут взаимно уравниваться и дадут в сумме нуль за исключением высших гармоник порядка, кратного трем. Эти гармоники имеют в любой момент одну и ту же величину и направление, а потому ток в нейтральном проводе будет равен тройной сумме высших гармоник порядка, кратного трем:

$$i_0 = i_A + i_B + i_C = 3I_{3m} \sin(3\omega t - \varphi_3) + 3I_{9m} \sin(9\omega t - \varphi_9) + \dots$$

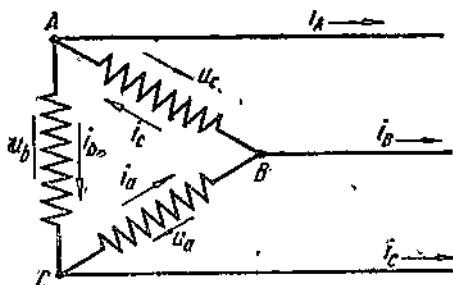
При отсутствии нейтрального провода ток в каждой из фаз не имеет высших гармоник третьего порядка, так как сумма токов в любой момент для каждой из высших гармоник тока должна равняться нулю, а высшие гармоники третьего порядка совпадают в своих фазах.

Так как в системе, соединенной в звезду, отсутствуют третьи гармоники тока, то в трехфазных цепях, соединенных в звезду и содержащих приемник энергии с насыщенным железным сердечником, в фазо-

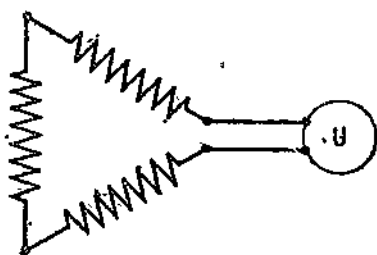
вых напряжениях могут появляться весьма значительные гармоники напряжения порядка кратного трем.

При параллельной работе нескольких генераторов на трехфазную сеть с нулевым проводом обычно нулевая точка только одного генератора присоединяется к нейтральному проводу, так как иначе в проводе, соединяющем нейтральные точки генераторов, даже при ненагруженной сети могут получаться весьма значительные токи высших гармоник, кратных трем, в случае неодинаковой формы кривых фазовых напряжений обоих генераторов.

В трехфазных системах, соединенных треугольником (фиг. 197), при несинусоидальных фазовых напряжениях сумма напряжений, действующих в замкнутом контуре ABC , не будет равна нулю, что имело бы место при синусоидальных напряжениях, а будет равна тройной сумме высших гармоник порядка, кратного трем, ибо последние в любой мо-



Фиг. 197. Трехфазная система, соединенная в треугольник.



Фиг. 198. Трехфазная система, соединенная в открытый треугольник.

мент имеют одно и то же направление. Если разомкнуть генератор и включить в цепь вольтметр последовательно с тремя фазами (фиг. 198), то вольтметр будет измерять третьи гармоники, так как остальные в сумме дадут нуль:

$$u_a + u_b + u_c = 3U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + 3U_{9m} \sin(9\omega t + \psi_9) + 3U_{15m} \sin(15\omega t + \psi_{15}) + \dots;$$

измеряемое вольтметром напряжение будет равно

$$U''' = 3 \sqrt{\frac{U_{3m}^2}{2} + \frac{U_{9m}^2}{2} + \frac{U_{15m}^2}{2} + \dots} = 3 \sqrt{U_3^2 + U_9^2 + U_{15}^2 + \dots} = 3U_1. \quad (72,3)$$

где U''' есть внутреннее напряжение, получаемое от сложения напряжений трех фаз, которое вызывает в замкнутом треугольнике внутренний ток. Этот ток протекает в замкнутом треугольнике даже и тогда, когда внешняя цепь, например, генератора, разомкнута. (При синусоидальных напряжениях ток в трех фазах генератора, соединенных треугольником, когда внешняя цепь разомкнута, равен нулю.) Это внутреннее напряжение U''' , состоящее из третьих гармоник при замкнутом

треугольнике, не будет выявляться между зажимами фаз, так как оно будет поглощаться во внутреннем сопротивлении фаз. Фазовое напряжение, т. е. напряжение между зажимами фаз, будет равно

$$U_{\text{мф}} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_{11}^2 + \dots}$$

Если r и L — сопротивление и индуктивность каждой фазы, то внутренний ток в треугольнике будет равен

$$I''' = \sqrt{\frac{U_a^2}{r^2 + 9\omega^2 L^2} + \frac{U_b^2}{r^2 + 81\omega^2 L^2} + \dots} = \sqrt{I_2^2 + I_6^2 + I_{18}^2 + \dots} \quad (72,4)$$

Внутренние токи тройной периодичности благодаря большой величине реактивного сопротивления вообще невелики. Если мы измерим токи в стороне треугольника и во внешнем отводящем проводе, то ток во внешнем отводящем проводе не будет содержать третьих гармоник тока, так как ток во внешнем проводе равен разности токов в сторонах треугольника: $I_a = i_c - i_b$ и в этой разности третьи гармоники, как совпадающие по фазе, выпадут. Если ток в стороне треугольника равен

$$I_a = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_9^2 + \dots},$$

то во внешнем проводе ток составляет

$$I_A = \sqrt{3} \cdot \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_{11}^2 + \dots}; \quad I_A < \sqrt{3} I_a \quad (72,5)$$

и будет меньше, чем при чисто синусоидальных токах.

Задача 46. Кривая фазового напряжения задана уравнением

$$u = 100 \sin \omega t + 40 \sin (3\omega t + 15^\circ) + 15 \sin (5\omega t + 20^\circ) + 10 \sin (7\omega t + 30^\circ) + 20 \sin (9\omega t + 45^\circ) \text{ В.}$$

Определить эффективные значения фазового и междуфазового напряжений.

Решение. Фазовое напряжение равно

$$\begin{aligned} U_{\phi} &= \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_9^2} = \\ &= \sqrt{\frac{U_{1m}^2}{2} + \frac{U_{3m}^2}{2} + \frac{U_{5m}^2}{2} + \frac{U_{7m}^2}{2} + \frac{U_{9m}^2}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{100^2}{2} + \frac{40^2}{2} + \frac{15^2}{2} + \frac{10^2}{2} + \frac{20^2}{2}} = 78,5 \text{ В.} \end{aligned}$$

Междуфазовое напряжение составляет

$$\begin{aligned} U_{\text{мф}} &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} (U_{1m}^2 + U_{3m}^2 + U_{5m}^2)} = \sqrt{\frac{3}{2} (10000 + 225 + 100)} = 124 \text{ В.} \end{aligned}$$

Для синусоидального напряжения мы должны были бы иметь

$$78,5 \cdot \sqrt{3} \text{ В} = 136 \text{ В.}$$

ПРОХОЖДЕНИЕ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА ЧЕРЕЗ КАТУШКИ С ЖЕЛЕЗНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

73. Кривые напряжения и тока без учета гистерезиса

Когда к зажимам индукционной катушки прикладывается переменное напряжение, то в любой момент внешнее напряжение u может быть разложено на две слагающих, из которых одна преодолевает активное сопротивление, а другая, уравнивает противодействующую э. д. с. индуктивности:

$$u = ri - e = ri - \left(-w \frac{d\Phi}{dt} \right) = ri + w \frac{d\Phi}{dt}. \quad (73,1)$$

Если катушка имеет железный сердечник, то между магнитным потоком Φ и током i существует определенная зависимость, $\Phi = f(i)$, характеризующая так называемой кривой намагничивания.

Для упрощения предварительного рассмотрения предположим, во-первых, что все витки катушки пронизываются одним и тем же магнитным потоком, т. е. что нет магнитного рассеяния, и, во-вторых, что активное сопротивление настолько мало, что активным падением напряжений можно пренебречь, т. е. что $r \approx 0$.

При таких условиях мгновенное значение внешнего напряжения в любой момент будет равно

$$u = w \frac{d\Phi}{dt} \quad (73,2)$$

и если внешнее напряжение меняется по закону синуса $u = U_m \sin \omega t$, то магнитный поток будет также меняться по закону синуса:

$$\Phi = \Phi_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{U_m}{\omega w} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (73,3)$$

Эффективное значение напряжения и максимальное значение магнитного потока при синусоидальном изменении напряжения связаны соотношением

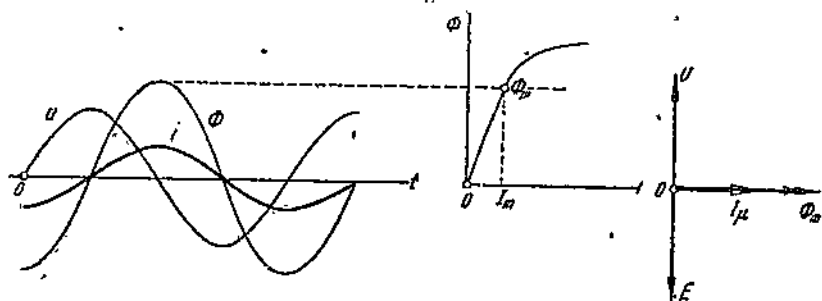
$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f}{\sqrt{2}} w \Phi_m \text{ и } \Phi_m = \frac{U}{4,44 f w}. \quad (73,4)$$

Кривая магнитного потока, представляется синусоидой, которая по фазе отстает от синусоиды внешнего напряжения на четверть периода, или 90° .

Отвлечемся на время от явления гистерезиса и вихревых токов в железе.

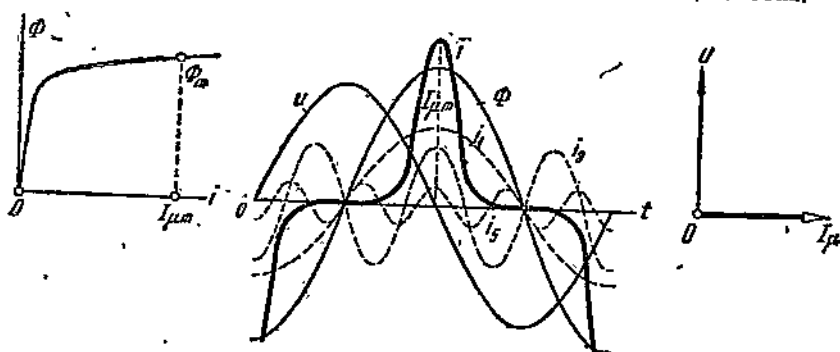
При малых насыщениях можно считать, что магнитный поток изменяется пропорционально току (по закону прямой) $\Phi = \text{const} \cdot i$ и что, поэтому ток также меняется по синусоиде, совпадающей по фазе с синусоидой магнитного потока (фиг. 199). В векторной диаграмме (фиг. 199) вектор магнитного потока $\dot{\Phi}_m = m_{\Phi} \cdot \overline{O\Phi_m}$ отстает от вектора

напряжения $\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = m_u \cdot \overline{OU}$ на 90° . Точно так же и вектор намагничивающего тока $\dot{I}_\mu = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = m_I \cdot \overline{OI}_\mu$ составляет с вектором напряжения $\overline{OU}$ угол в 90° .



Фиг. 199. Синусоидальное изменение напряжения магнитного потока и намагничивающего тока при $\Phi : i = \text{const}$.

При больших индукциях наступает магнитное насыщение, и отношение магнитного потока к намагничивающему току по мере увеличения значения магнитного потока уменьшается. Если бы не имело места явление гистерезиса, то мы могли бы построить кривую намагничивающего тока, находя для каждого мгновенного значения магнитного потока Φ по кривой намагничивания соответствующее значение i и откладывая это значение i на той же ординате, что и Φ . Огибающая концов этих ординат и дает кривую намагничивающего тока.

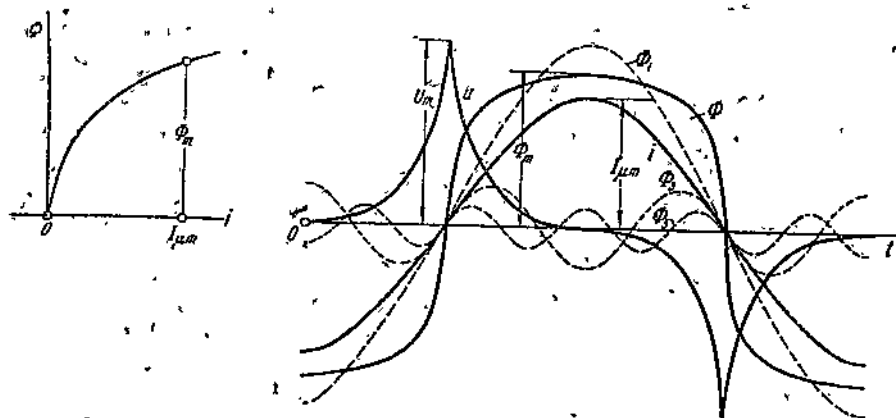


Фиг. 200. Кривая намагничивающего тока при насыщении железа и отсутствии гистерезиса.

При насыщении железа, но при отсутствии гистерезиса и вихревых токов кривая тока получает заостренную симметричную форму, начало этой кривой сдвинуто, как и синусоида магнитного потока, по отношению к синусоиде напряжения на четверть периода. Нулевые точки и амплитуды кривой тока совпадают с нулевыми точками и амплитудами синусоиды магнитного потока. Чем больше насыщение железа, тем острее

кривая тока, тем резче в кривой тока выступают в первую очередь третья гармоника, а затем и пятая гармоника (фиг. 200). Так как процессы намагничивания и размагничивания железа, если не учитывать явления гистерезиса, протекали бы однообразно (по одной и той же кривой намагничивания), то вся энергия, накапливаемая в железе во время намагничивания, возвращалась бы обратно в сеть во время размагничивания и средняя мощность, забираемая из сети, была бы равна нулю.

Выше мы рассматривали форму кривой тока при синусоидальном изменении напряжения. Рассмотрим теперь, как будет меняться напряжение на концах катушки с железом, если по закону синуса будет меняться ток, проходящий через катушку (при условии, что отсутствует явление гистерезиса). Для этого по кривой первоначального намагничивания находим для каждого мгновенного значения тока i со-



Фиг. 201. Кривые магнитного потока и напряжения при синусоидальном токе.

ответствующее мгновенное значение магнитного потока Φ . Так как при малых значениях i (малых значениях напряженности поля) магнитная проницаемость больше, чем при больших значениях i , то кривая магнитного потока получает приплюснутый (тупой) вид (фиг. 201). А как было выведено в § 71, тупой кривой магнитного потока соответствует острая кривая напряжения. Если кривую магнитного потока разложить на высшие гармоники, то мы увидим, что максимальное значение магнитного потока будет меньше, чем значение амплитуды основной гармоники магнитного потока:

$$\Phi_m = \Phi_{1m} + \Phi_{3m} + \Phi_{5m} + \dots$$

Электродвижущая сила, наводимая действительным магнитным потоком, будет состоять из основной синусоиды и ряда высших гармоник:

$$E_{1m} = 2\pi f \Phi_{1m}; E_{3m} = 2\pi \cdot 3f \Phi_{3m}; E_{5m} = 2\pi \cdot 5f \Phi_{5m} \dots$$

Так как при том же значении магнитного потока э. д. с. пропорциональна числу периодов, то амплитуда, например, третьей гармоники э. д. с., а следовательно, и напряжения, может быть больше амплитуды основной синусоиды напряжения.

74. Явление гистерезиса в цепях переменного тока

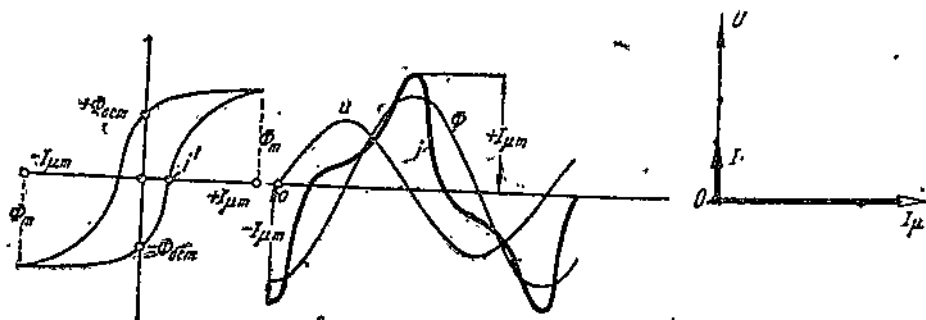
Как было указано в § 64 I тома, намагничение железа зависит не только от мгновенного значения намагничивающего тока (напряженности магнитного поля), но и от того магнитного состояния, в котором находилось железо в предшествующий момент. Явление это, называемое гистерезисом, видоизменяет форму кривых тока или напряжения (в зависимости от того, будем ли мы исходить из заданной формы кривой напряжений или кривой тока), нарушая симметрию кривых относительно их амплитудных значений).

Предположим опять, что активное сопротивление ничтожно мало и что вихревые токи сведены на-нет; это может быть достигнуто подразделением железного сердечника на листы. Тогда при синусоидальном внешнем напряжении

$$u = U_m \sin \omega t$$

кривая магнитного потока будет также синусоидой с амплитудой

$$\Phi_m = \frac{U}{4,44 f w},$$



Фиг. 202. Кривая тока при наличии гистерезиса.

сдвинутой относительно синусоиды напряжения на четверть периода. Для нахождения кривой тока мы по кривой гистерезиса, а не по кривой первоначального намагничивания должны найти для каждого значения магнитного потока соответствующее значение тока i . Будем строить кривую тока, начиная с $-\Phi_m$, когда мгновенное значение тока, найденное по кривой гистерезиса, равно $-I_m$. При уменьшении абсолютного значения магнитного потока (по синусоиде) абсолютное значение соответствующего тока будет спадать весьма быстро, и при некотором значении магнитного потока $-\Phi = -\Phi_{ост}$ ток будет равен нулю. Далее при $\Phi = 0$ ток будет равен i' , а затем с увеличением Φ ток будет нарастать сначала медленно, а потом весьма быстро, пока поток не достигнет значения $+\Phi_m$ (фиг. 202).

Если магнитное насыщение при синусоидальном напряжении заостряет кривую тока, не нарушая ее симметрии, то гистерезис эту симметрию нарушает. Хотя амплитуды магнитного потока и тока совпадают, однако нулевые точки кривой магнитного потока и тока сдвинуты

друг относительно друга. Средняя мощность за период не будет равна нулю. Для упрощения предположим, что сердечник катушки имеет кольцеобразную форму и что витки равномерно распределены по кольцу; тогда мы будем иметь

$$H = \frac{wI}{l}; \Phi = BS; u = w \frac{d\Phi}{dt} = wS \frac{dB}{dt},$$

средняя мощность, поглощаемая, на гистерезис, за период будет равна

$$P_H = \frac{1}{T} \int_0^T uI dt = \frac{1}{T} \int_0^T w \frac{d\Phi}{dt} I dt = f \int_0^T wS \frac{dB}{dt} \cdot \frac{HI}{w} dt = \\ = fSl \oint H dB = fV \oint H dB; \quad (74,1)$$

Потери на гистерезис, как было выведено в гл. III I тома, могут быть вычислены для заданного объема железа V и максимальной индукции железа B_m по формуле Рихтера:

$$P_H = \left[a \frac{f}{100 \text{ Hz}} \cdot \frac{B_m}{10000 \text{ G}} + b \frac{f}{100 \text{ Hz}} \left(\frac{B_m}{10000 \text{ G}} \right)^2 \right] G, \quad (74,2)$$

где f — частота в герцах; B_m — индукция в гауссах; G — все железа в килограммах, а коэффициенты a и b имеют значения, помещенные в таблице.

Таблица коэффициентов, определяющих потери в железе

	Обыкновенное динамное железо			Высоколегированное железо	
Толщина листов в мм	1	0,5	0,35	0,5	0,35
Коэффициент a в $\frac{W}{kG}$	0,9	0,9	0,9	0,4	0,3
" b " "	3,5	3,5	3,8	2,6	2,1
" σ_H " "	4,4	4,4	4,7	3,0	2,4
" σ_F " "	22,5	5,7	3,0	1,3	0,7

При практических подсчетах для больших индукций (выше 10 000 G) потери на гистерезис подсчитываются обыкновенно по упрощенной формуле:

$$P_H = \sigma_H \frac{f}{100 \text{ Hz}} \left(\frac{B_m}{10000 \text{ G}} \right)^2 G, \quad (74,3)$$

где G — опять вес железа в kG, а коэффициент σ_H приравнивается к числам, приведенным в таблице.

Потери на гистерезис дают активную слагающую тока. Кривая тока может сильно отличаться от синусоиды, и это обстоятельство затруднило бы вычисления, если бы мы по кривым напряжения и тока стали каждый раз определять кривую мгновенных мощностей $uI = f(t)$ и по

этой кривой — среднюю мощность. Поэтому на практике оперируют с некоторыми эквивалентными синусоидами и полагают, что если построить кривую тока по гистерезисной кривой намагничивания, то эффективное значение тока составляется из двух слагающих, сдвинутых на 90° : одной отстающей на 90° от напряжения (или, вернее, от слагающей внешнего напряжения, равной и противоположной противодействующей э. д. с. индукции $U = -E = E'$) и равной по величине максимальному значению намагничивающего тока, деленному на $\sqrt{2}$:

$$I_k = \frac{I_{\text{нм}}}{\sqrt{2}}, \quad (74,4)$$

и другой, совпадающей по фазе с E' и по величине равной потерям на гистерезис, деленным на величину э. д. с.:

$$I_h = \frac{P_H}{E'}. \quad (74,5)$$

Таким образом ток, проходящий через катушку, при отсутствии вихревых токов определяется через

$$I = \sqrt{I_k^2 + I_h^2}. \quad (74,6)$$

75. Потери на вихревые токи

Изменяющийся магнитный поток, проходящий через сплошные металлические массы (например, через железный сердечник катушки), наводит в них э. д. с., являющиеся причиной так называемых вихревых токов (токов Фуко или паразитных токов), которые нагревают железо и вызывают бесполезную трату энергии. С целью уменьшения потерь от вихревых токов подразделяют железное тело поверхностями, параллельными индукционным линиям, на части, которые электрически изолируются друг от друга. Благодаря такому, подразделению поперечное сечение отдельных частей будет меньше, и в контурах, по которым направляются вихревые токи, будут наводиться меньшие э. д. с., так как токи будут охватывать меньший магнитный поток, и в конечном результате потери на вихревые токи будут также меньше.

Если сердечник состоит из изолированных друг от друга круглых железных проволок и магнитный поток совпадает по направлению с осью проволок, то вихревые токи располагаются по концентрическим окружностям.

Выделим часть проволоки длиной l и рассмотрим полный цилиндр с радиусом x и толщиной стенки dx (фиг. 203). Величина потока, проходящего через этот контур, в предположении, что направление индукционных линий совпадает с осью проволоки и что магнитная индукция равномерно распределяется по всему сечению, будет

$$\Phi_{xm} = \pi x^2 B_m,$$

а величина наведенной э. д. с.

$$E_x = 4k f \Phi_{xm}.$$

Сопротивление этого контура равно

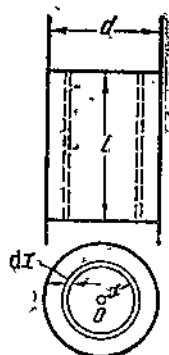
$$r_x = \frac{2\pi x}{ldx} \rho,$$

где ρ — удельное сопротивление железа; $2\pi x$ — длина и ldx — поперечное сечение контура. Количество энергии, поглощаемое в единицу времени в рассматриваемом контуре, выразится через $dP_x = \frac{E_x^2}{r_x}$, а во всем объеме проволоки длиной l — через

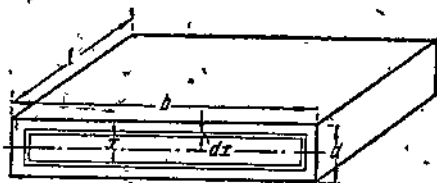
$$P_F = \int_0^{\frac{d}{2}} 4\pi k^2 f^2 (\pi x^2 B_m)^2 \frac{l dx}{2\pi x \rho} = \frac{2}{\rho} k^2 f^2 \pi B_m^2 l \int_0^{\frac{d}{2}} 4x^3 dx = \\ = \frac{2}{\rho} k^2 f^2 \pi B_m^2 l \left[x^4 \right]_0^{\frac{d}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\rho} k^2 f^2 d^2 B_m^2 \left(l \frac{\pi d^2}{4} \right) = \frac{1}{2\rho} k^2 f^2 d^2 B_m^2 V, (75,1)$$

где V — объем одной проволоки. Из этого уравнения следует, что потери мощности на вихревые токи в круглой железной проволоке пропорциональны квадрату частоты, квадрату магнитной индукции и квадрату диаметра и обратно пропорциональны удельному сопротивлению железа.

Вышеприведенная формула (75,1) применима лишь для небольших диаметров железных проволок (порядка 1—2 мм) и для небольших частот: при больших диаметрах и частотах благодаря размагничивающему действию самих вихревых то-



Фиг. 203. Потери на вихревые токи для круглой железной проволоки.



Фиг. 204. Потери на вихревые токи для железных листов.

ков, текущих по концентрическим окружностям, магнитная индукция в середине железного сердечника будет уменьшаться и будет отличаться по фазе от магнитной индукции на периферии сечения.

Подобным же образом в предположении равномерного распределения магнитной индукции могут быть определены потери от вихревых токов в том случае, когда железо, подвергающееся перемагничиванию, состоит из электрически изолированных друг от друга железных листов. Вихревые токи можно считать расположенными по прямоугольным контурам, которые ввиду большой ширины листов по сравнению с их толщиной могут быть приняты имеющими длину, равную ширине

листа b , а ширину, равную $2x$ (фиг. 204); э. д. с., наводимая в контуре, отстоящем от середины на расстоянии x , будет

$$E_x = 4kf\dot{b} \cdot 2xB_m.$$

При определении сопротивления этого контура мы можем ограничиться лишь сопротивлением длинных его сторон ввиду незначительного размера толщины листа и ничтожно малого сопротивления боковых сторон контура:

$$r_x = 2 \frac{b}{l dx} \rho.$$

Потери в единицу времени в бесконечно тонком контуре равны

$$dP_x = \frac{E_x^2}{r_x},$$

а во всем объеме составляют

$$\begin{aligned} P_F &= \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{16k^2 f^2 b^2 \cdot 4x^2 B_m^2 l dx}{2b\rho} = \frac{32k^2 f^2 b B_m^2 l}{\rho} \int_0^{\frac{d}{2}} x^2 dx = \\ &= \frac{4}{3} \frac{1}{\rho} k^2 f^2 d^2 B_m^2 (lbd) = \frac{4}{3} \frac{1}{\rho} k^2 f^2 d^2 B_m^2 V. \end{aligned} \quad (75,2)$$

Для железных листов потери от вихревых токов выражаются подобной же формулой, как и для круглых проволок, которая указывает, что потери пропорциональны квадратам частоты, толщины листов и магнитной индукции.

Так как э. д. с. в рассмотренных нами контурах и э. д. с. в катушке, охватывающей железный сердечник, наводятся одним и тем же потоком, то коэффициент формы кривой k в формуле для потерь на вихревые токи будет иметь ту же самую величину, как и для противо-э. д. с., которая при малом сопротивлении катушки ($r=0$) равна и противоположна напряжению у зажимов. Отсюда следует, что при одном и том же эффективном значении напряжения у зажимов потери на вихревые токи не зависят от формы кривой этого напряжения и от частоты, так как для одного и того же значения напряжения $E = 4kf\dot{w}B_m S$ (S — сечение сердечника) величина $kf\dot{B}_m$ постоянна. При синусоидальном изменении э. д. с. $k = 1,11$.

Удельное сопротивление железа, отнесенное к 1 см^2 , $\rho = 10^{-5} \Omega \text{ см}$. Подставляя вместо ρ и k их значения и выражая диаметр проволоки и толщину листов в миллиметрах, мы для потерь от вихревых токов получим следующие формулы для круглых проволок:

$$\begin{aligned} P_F &= \frac{10^5}{2} 1,11^2 \left[\frac{f}{\text{Hz}} \frac{d}{10 \text{ мм}} \cdot \frac{B_m}{10^3 \text{ Г}} \right]^2 \frac{V}{\text{см}^3} W = \\ &= 0,62 \left[\frac{f}{\text{Hz}} \frac{d}{\text{мм}} \frac{B_m}{\text{Г}} \right]^2 \frac{V}{\text{см}^3} 10^{-13} W \end{aligned}$$

и для железных листов

$$P_F = \frac{4 \cdot 10^8}{3} 1,11^2 \left[\frac{f}{\text{Hz}} \frac{d}{\text{mm}} \cdot \frac{B_m}{10^8 \text{G}} \right]^2 \frac{V}{\text{cm}^3} W =$$

$$= 1,64 \left[\frac{f}{\text{Hz}} \frac{d}{\text{mm}} \cdot \frac{B_m}{\text{G}} \right]^2 \frac{V}{\text{cm}^3} 10^{-13} W$$

или в общем виде

$$P_F = \xi \left[\frac{f}{\text{Hz}} \frac{d}{\text{mm}} \cdot \frac{B_m}{\text{G}} \right]^2 \frac{V}{\text{cm}^3} 10^{-13} W, \quad (75,3)$$

где V — объем всего железа в кубических сантиметрах; B_m — максимальная индукция в гауссах и d — в первом случае диаметр проволоки, а во втором — толщина листов в миллиметрах.

Приведенный для железных листов коэффициент 1,64 зависит от свойств железа. Для некоторых сортов он доходит до 2. Путем добавления к железу в небольшом количестве силиция и отчасти алюминия удалось выработать такие сорта так называемого легированного железа, которые имеют большее удельное сопротивление, чем обыкновенное железо, и благодаря этому — меньшие потери на вихревые токи. При $2 \div 3,5\%$ содержания силиция удастся понизить потери от вихревых токов в $4 \div 5$ раз, при этом магнитная проницаемость железа немного ухудшается. Что касается потерь на гистерезис, то они в легированном железе также немного меньше, чем в обыкновенном.

В электрических аппаратах и машинах железные части, подверженные переменному намагничиванию, обыкновенно набираются из железных листов толщиной от 0,35 до 0,5 мм. При таких толщинах и частоте, не превышающей 50 Hz, увеличение потерь на вихревые токи вследствие неравномерного распределения магнитной индукции ничтожно.

Так как потери на вихревые токи пропорциональны квадрату толщины железных листов, то казалось бы, что, уменьшая толщину листов, мы могли бы довести потери на вихревые токи до какой угодно малой величины; однако так как листы должны быть изолированы друг от друга (на изоляцию каждого листа уходит до 0,05 мм), то деление железа на большее число слоев при той же индукции требует для получения того же магнитного потока увеличения общего сечения (объема), занимаемого сердечником. При неизменном же общем сечении (объеме) сердечника чрезмерное подразделение железа может настолько уменьшить полезное сечение, что вследствие увеличения магнитной индукции потери на гистерезис настолько возрастут, что в конечном результате потери в железе не уменьшатся, а увеличатся.

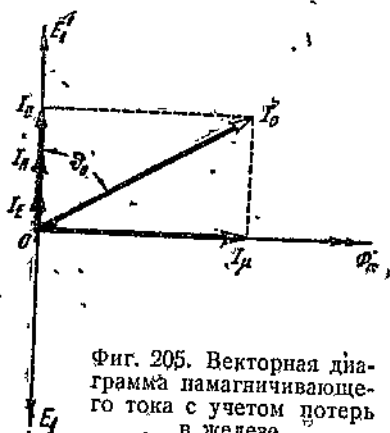
При практических подсчетах потерь на вихревые токи обыкновенно исходят не из объема, а из веса перематываемого железа и определяют эти потери по формуле

$$P_F = \sigma_F \left(\frac{f}{100 \text{ Hz}} \cdot \frac{B_m}{10000 \text{ G}} \right)^2 G, \quad (75,4)$$

где G — вес железа в килограммах, а коэффициент σ_F приравнивается в зависимости от толщины листов к значениям, приведенным в таблице стр. 243.

Потери от вихревых токов в железном сердечнике покрываются соответствующей, активной слагающей тока, проходящего через намагничивающую обмотку.

Пусть $\Phi_m = m_\Phi \cdot \overline{O\Phi_m}$ есть вектор магнитного потока (фиг. 205), проходящего внутри катушки и возбуждаемого током $I_\mu = m_I \cdot \overline{OI_\mu}$,



Фиг. 205. Векторная диаграмма намагничивающего тока с учетом потерь в железе.

тогда вихревые токи в сердечнике отстают от вектора $\overline{O\Phi_m}$ на 90° [мы предполагаем, что короткозамкнутые контуры, на которые могут быть разложены отдельные железные листы сердечника, не образуют собственного магнитного поля и это поэтому (вихревые) токи в них совпадают по фазе с наводимыми в них э. д. с.]. Для компенсации этих вихревых токов ток в обмотке катушки кроме слагающей $I_\mu = m_I \cdot \overline{OI_\mu}$ и активной слагающей, покрывающей потери от гистерезиса, должен иметь еще активную слагающую, покрывающую потери от вихревых токов, которая по фазе прямо противоположна вихревым токам. Величина этой слагающей может быть определена из потерь на вихревые токи:

$$I_F = m_I \cdot OI_F = \frac{P_F}{E_1}.$$

Вектор этой слагающей совпадает по направлению со слагающей внешнего напряжения $\overline{OE_1}$, уравновешивающей противодействующую э. д. с., наводимую в обмотке магнитным потоком Φ_m .

76. Неравномерное распределение магнитной индукции в железных листах

В предыдущем параграфе потери в железных листах от вихревых токов были вычислены в предположении, что магнитная индукция во всех точках сечения одинакова, что имело бы место, если бы вихревые токи сами не производили размагничивающего действия. Рассмотрим теперь влияние вихревых токов в железных листах на распределение в них магнитной индукции в предположении, что магнитная проницаемость μ будет оставаться постоянной.

Для этого выберем прямоугольную систему координат так, чтобы начало лежало в середине сечения и чтобы ось Z совпадала с направлением напряженности внешнего поля, меняющегося по закону синуса с неизменной амплитудой, одинаковой во всех точках (фиг. 206):

$$H_{\text{вн}} = H_{\text{zm}} e^{j\omega t}.$$

Образующиеся вихревые токи, плотность которых мы обозначим через δ , будут направлены параллельно плоскости, перпендикулярной к оси Z , т. е. будут лежать в плоскости XY и будут направлены параллельно ширине листа, т. е. по оси Y . При синусоидальном изменении напряженности внешнего поля плотность вихревых токов, если только магнитная проницаемость μ остается постоянной, будет меняться по закону синуса:

$$\delta = \delta_m e^{i\omega t}.$$

Амплитуды и фазы колебаний плотности вихревых токов будут зависеть от расстояния x до средней линии сечения.

Выделим в плоскости XY прямоугольник $abcd$ с площадью $dx dy$, через который будет проходить магнитный поток

$$d\Phi = \mu H dx dy = \mu H_m e^{i\omega t} dx dy,$$

Фиг. 206. Неравномерное распределение магнитной индукции в железных листах.

где H_m — напряженность (определяемая амплитудой и фазой) суммарного поля, состоящая из напряженностей внешнего поля и поля, создаваемого вихревыми токами. Наводимая в этом контуре э. д. с. должна равняться падению напряжения вдоль контура или разности падений напряжения на участках ab и bc :

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu dH dx dy}{dt} = \frac{(\delta + d\delta) dy}{\gamma} - \frac{\delta dy}{\gamma}, \quad (76,1)$$

или

$$e(\delta + d\delta) dy - e\delta dy = e d\delta dy = \frac{d\delta dy}{\gamma} \quad (76,2)$$

или

$$-\frac{dH}{dt} = \frac{1}{\gamma\mu} \frac{d\delta}{dx} \quad (76,3)$$

Затем возьмем контур $mnpq$, параллельный плоскости XZ , и определим для него линейный интеграл напряженности магнитного поля. На участках mn и pq произведение $H dl$ равно нулю. На двух других участках, np и qm , мы получим, если будем обходить контур по стрелке часов

$$H dz - (H + dH) dz = \delta dx dz,$$

поэтому

$$\oint H dl = -dH dz = \delta dx dz,$$

или

$$-\frac{dH}{dx} = \delta. \quad (76,4)$$

Если взять первую производную по x от уравнения (76,4) и подставить в него выражение $\frac{d\delta}{dx}$ из уравнения (76,3)

$$-\frac{d^2 H}{dx^2} = \frac{d\delta}{dx} = -\gamma \mu \frac{dH}{dt},$$

то мы получим уравнение

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = \gamma \mu \frac{dH}{dt}. \quad (76,5)$$

Подставляя вместо H

$$H = \dot{H}_{xm} e^{j\omega t}$$

и взяв от H вторую производную по x и первую производную по t , мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2 \dot{H}_{xm}}{dx^2} e^{j\omega t} = j\omega \gamma \mu \dot{H}_{xm} e^{j\omega t}.$$

Сокращая на $e^{j\omega t}$ и делая замену:

$$2k_1^2 = \omega \gamma \mu, \text{ или } k_1 = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu}{2}},$$

мы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \dot{H}_{xm}}{dx^2} = 2jk_1^2 \dot{H}_{xm}. \quad (76,6)$$

Частным решением этого уравнения является выражение

$$\dot{H}_{xm} = A_2 e^{px}, \quad (76,7)$$

если взять вторую производную от $\dot{H}_{xm}$ и подставить ее в уравнение (76,6), то мы получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} p^2 &= 2jk_1^2; \quad p = \pm \sqrt{2} k_1 (e^{j\frac{\pi}{2}})^{1/2} = \\ &= \pm \sqrt{2} k_1 \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) = \pm (1 + j) k_1. \end{aligned}$$

Общее же решение будет иметь вид

$$H_{xm} = A_1 e^{px} + A_2 e^{-px} = 2A_1 \operatorname{ch} px. \quad (76,8)$$

Коэффициенты A_1 и A_2 должны быть равны, так как с заменой x на $-x$ мы должны получить то же значение для $\dot{H}_{xm}$. Если мы обозначим через $\dot{H}_{am}$ амплитуду напряженности поля на краю листа ($x=a$, где $a = \frac{d}{2}$ — толщина листа) и примем во внимание, что $\operatorname{ch} 0 = 1$, то мы

получим следующее соотношение амплитуд напряженности поля, а следовательно, и магнитных индукций

$$\frac{\dot{H}_{xm}}{\dot{H}_{am}} = \frac{\dot{B}_{xm}}{\dot{B}_{am}} = \frac{\operatorname{ch} px}{\operatorname{ch} pa}. \quad (76,9)$$

На внешней поверхности листа внутренние вихревые токи не оказывают влияния на магнитное поле, а потому напряженность поля на внешней поверхности листа совпадает по направлению, величине и фазе с напряженностью внешнего магнитного поля, создаваемого намагничивающей обмоткой.

Чтобы перейти к численным значениям, то мы вместо $\operatorname{ch} px$ и $\operatorname{ch} pa$ должны взять их модули

$$|\operatorname{ch} px| = |\operatorname{ch}(k_1x + jk_2x)| = |\operatorname{ch} k_1x \cos k_2x + j \operatorname{sh} k_1x \cdot \sin k_2x| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2k_1x + \cos 2k_2x}{2}}.$$

Поэтому магнитная индукция в какой-нибудь точке x будет относиться к магнитной индукции на краю листа как

$$\frac{H_{xm}}{H_{am}} = \frac{B_{xm}}{B_{am}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2k_1x + \cos 2k_2x}{\operatorname{ch} 2k_1a + \cos 2k_2a}}. \quad (76,10)$$

Выразим еще среднее значение амплитуд магнитной индукции во всем сечении через амплитуду магнитной индукции на краю:

$$\begin{aligned} \dot{B}_{med\ m} &= \frac{1}{a} \int_0^a \dot{B}_{xm} dx = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{\dot{B}_{am} \operatorname{ch} px}{\operatorname{ch} pa} \frac{dpx}{p} = \\ &= \frac{\dot{B}_{am}}{pa \operatorname{ch} pa} \left| \operatorname{sh} px \right|_0^a = \frac{\dot{B}_{am}}{pa} \operatorname{th} pa. \end{aligned}$$

Чтобы перейти к числовым значениям, мы должны подставить модули:

$$|p| = (1 + j)k_1 = \sqrt{2}k_1 = \sqrt{\omega\mu},$$

а модуль $\operatorname{tg} pa$ равен отношению модулей $\operatorname{sh} pa$ и $\operatorname{ch} pa$.

Поэтому

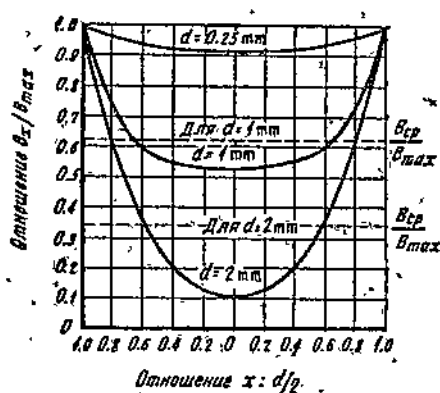
$$\frac{B_{med\ m}}{B_{am}} = \frac{1}{\sqrt{2}k_1a} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2k_1a - \cos 2k_2a}{\operatorname{ch} 2k_1a + \cos 2k_2a}} = \frac{B_{med}}{B_{max}}. \quad (76,11)$$

На фиг. 207 показано, как распределяется магнитная индукция при $f = 100$ Hz в железных листах различной толщины ($d = 2a = 0,25$ мм, 1 мм и 2 мм), а также отношение среднего значения магнитной индукции к максимальной, а на фиг. 208 распределение магнитной индукции в железных листах при $f = 100$ Hz и $f = 1000$ Hz.

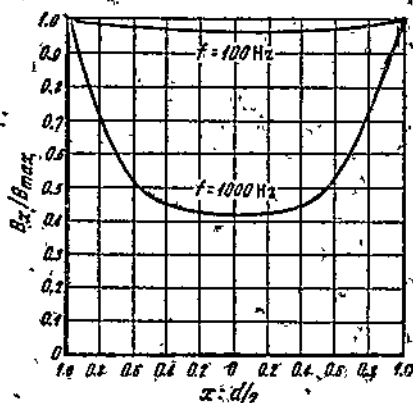
Неравномерное распределение магнитной индукции влечет за собой весьма значительное увеличение потерь на вихревые токи. Эти потери могут быть подсчитаны по следующей формуле:

$$P_F = \frac{B_{med}^2 m \pi^2}{2} f^2 \gamma d^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{(k_1 d)^4}{1890} \right], \quad (76,12)$$

которая совпадает с формулой (75,2), если пренебречь вторым членом и если приравнять $\frac{1}{\gamma} = \rho$ и $k = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.



Фиг. 207. Распределение магнитной индукции в железных листах при частоте 100 Гц.



Фиг. 208. Распределение магнитной индукции в железных листах при частоте 100 и 1000 Гц.

77. Общие потери в железе

Потери от перемагничивания железа, обусловленные гистерезисом и вихревыми токами, могут быть определены для малых индукций по формуле

$$P_{Fe} = \left[a \frac{f}{100 \text{ Гц}} \frac{B_m}{10\,000 \text{ Г}} + b \frac{f}{100 \text{ Гц}} \left(\frac{B_m}{10\,000 \text{ Г}} \right)^2 + \sigma_F \left(\frac{f}{100 \text{ Гц}} \frac{B_m}{10\,000 \text{ Г}} \right)^2 \right] G,$$

а для больших индукций, $\gg 10\,000 \text{ Г}$,

$$P_{Fe} = \left[\sigma_H \frac{f}{100 \text{ Гц}} \left(\frac{B_m}{10\,000 \text{ Г}} \right)^2 + \sigma_F \left(\frac{f}{100 \text{ Гц}} \frac{B_m}{10\,000 \text{ Г}} \right)^2 \right] G,$$

где G — вес железа. Потери получаются в ваттах, если G дано в килограммах, так как a , b , σ_H и σ_F имеют размерность $\frac{\text{Вт}}{\text{кг}}$.

Потери на гистерезис бывают обыкновенно значительно больше, чем потери от вихревых токов.

Общая активная слагающая тока может быть выражена через потери на перемагничивание железа:

$$I_a = I_H + I_F = \frac{P_H + P_F}{E_1} = \frac{P_{Fe}}{E_1}. \quad (77,1)$$

Она совпадает по направлению с вектором, уравнивающим про-
тиво-э. д. с., наводимую в катушке (фиг. 205). Геометрическая сумма
намагничивающей и активной составляющих и определяет тот ток, который
проходил бы через катушку при внешнем напряжении $U = E_1' = m_U \cdot OE_1$;
если бы активное сопротивление было ничтожно мало, $r = 0$:

$$I_0 = \sqrt{I_p^2 + I_a^2} = m_I \cdot OI_0.$$

Этот ток в катушке без активных потерь в меди отставал бы от
соответствующего напряжения на угол ϑ_0 :

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{I_p}{I_a}.$$

Этот угол тем меньше, чем больше потери в железе.

В случае если магнитная цепь состоит из отдельных железных частей,
имеющих разные сечения и разные индукции или же набранных из раз-
ных сортов железа, то подсчитывают потери для отдельных частей
в соответствии с имеющимися там максимальными индукциями и объ-
ёмами или весами этих частей. Складывая затем потери в отдельных
частях магнитной цепи, находят общие потери на перемагничивание
(гистерезис и вихревые токи), а затем, деля значение потерь на э. д. с.
[уравнение (77;1)], определяют активную составляющую тока так же, как
это было сделано выше.

Благодаря потерям (на гистерезис и вихревые токи) железо, подде-
ряемое переменному намагничиванию, нагревается. Эти потери в динамо-
машинах покрываются за счёт работы, совершаемой валом машины,
а в дроссельных катушках, трансформаторах, моторах энергия, покрыва-
ющая потери, доставляется извне путем электромагнитной индукции.

На величину потерь кроме химического состава железа имеет такое
большое влияние способ механической и термической обработок железа.
Кроме того, потери увеличиваются благодаря тому, что в местах стыков
при переходе магнитного потока с одних листов на другие индукцион-
ные линии располагаются нормально к железным листам. Сверх того,
в результате обработки (заусенцы) получается местами электрическое
соединение смежных листов. Вследствие этого получают неравномерное
распределение индукции и иногда весьма значительное увеличение потерь
на гистерезис и вихревые токи.

Потери в листовом железе определяют обыкновенно при помощи
аппарата Эпштейна, в котором четыре пакета, набранные из нарезанных
из листов изолированных друг от друга полос помещаются в четыре
соединённых последовательно катушки, расположенные по сторонам
квадрата, так что пакеты железа образуют замкнутый магнитопровод.
Каждая катушка состоит из толстой обмотки, через которую пропускают
намагничивающий ток, и тонкой измерительной обмотки с тем же чис-
лом витков, служащей для измерения магнитной индукции и к которой
присоединяется катушка напряжения ваттметра. Токовая обмотка ватт-
метра включается последовательно с толстой обмоткой катушек. Если
 U — напряжение на концах измерительной обмотки, то из уравнения
 $U = 4,44 f N S B_m$ может быть определена амплитуда магнитной индукции

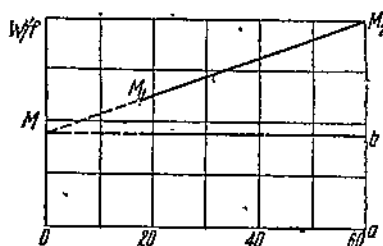
в железе. Измеренная ваттметром мощность с соответствующими поправками на потери энергии в тонкой обмотке аппарата определяют потери в железе, при заданной частоте f и индукции B_m . Так как потери в железе состоят из потерь на гистерезис, пропорциональных частоте, и потерь на вихревые токи, пропорциональных квадрату частоты, то потери мощности в железе могут быть выражены через

$$P_{Fe} = M \cdot f + N f^2.$$

Если определять потери при одной и той же индукции B_m , но при разных частотах и наносить в виде диаграммы отношение

$$\frac{P_{Fe}}{f} = M + N f$$

в зависимости от f , то на диаграмме фиг. 209 мы должны получить прямую $M_1 M_2$, продолжение которой на оси ординат отсечет отрезок



Фиг. 209.

которой на оси ординат отсечет отрезок $M = m_p \cdot OM$ (где m_p — масштаб, указывающий скольким $\frac{W}{Hz}$ равна единица длины ординат), который определяет потери в данном весе (или объеме) железа на гистерезис, отнесенные к одному герцу, тангенс же угла наклона линии MM_2 к горизонтали

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b M_2}{Oa} = \frac{N \cdot f \cdot m_f}{m_p \cdot f}$$

или

$$N = \frac{m_p}{m_f} \operatorname{tg} \alpha$$

позволяет нам определить потери на вихревые токи в данном весе при той же магнитной индукции, отнесенные также к одному герцу.

Качество железа в отношении потерь принято характеризовать так называемым числом потерь. Под этим числом подразумевается число ватт, поглощаемых 1 кг железа при температуре в 30°C и при $f = 50 \text{ Hz}$, когда B_m равна 10 000 или 15 000 G.

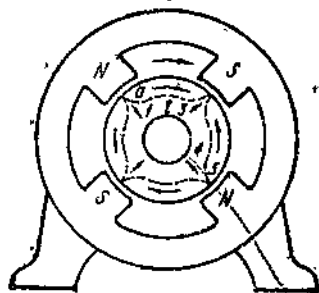
В нижеследующей таблице приведены эти числа потерь.

Сорт железа	Толщина d в мм	Удель- ный вес	Потери в $\frac{W}{kg}$	
			при $B_m =$ 10 000 G P_{10}	при $B_m =$ 15 000 G P_{15}
Обыкновенное железо	0,5	7,8	3,5	8
Слабо легированное железо	0,5	7,75	2,8	6
Высоко легированное железо	0,5	7,55	2	4
То же	0,35	7,55	1,5	3,5

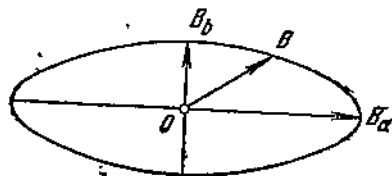
78. Потери при вращательном намагничивании

В отличие от большинства аппаратов переменного тока, как, например, дроссельных катушек и трансформаторов, в которых намагничивание железа происходит попеременно лишь в двух взаимно противоположных направлениях, в электрических машинах магнитная индукция, например, во вращающихся частях машины (в якоре или роторе) (фиг. 210), сохраняет большей частью свое значение, но меняет свое направление по отношению к вращающимся частям машины. Вследствие этого железо вращающихся частей испытывает вращательное намагничивание.

При продвижении какой-нибудь точки якоря a от северного полюса, т. е. из положения 1, в котором намагничение направлено по радиусу, в положение 2, магнитная индукция изменяет свое направление по отношению к радиусу на 90° ; при приближении к южному полюсу (положение 3) направление намагничивания



Фиг. 210. Вращательное намагничивание.



Фиг. 211. Кривая вращательного намагничивания железа.

изменится на 180° к первоначальному направлению и при приближении к следующему северному полюсу намагничение примет прежнее направление. Таким образом если машина имеет $2p$ полюсов, то железо якоря за один оборот машины подвергнется p полным циклам вращательного намагничивания. При этом магнитная индукция может в разных направлениях иметь и разные значения.

Если значения магнитной индукции в каждом объемном элементе железа, меняющиеся не только по направлению, но и по величине, откладывать в виде векторов, то в общем случае концы этих векторов будут описывать замкнутую кривую (фиг. 211), которая может отступать от окружности.

Потери на гистерезис при вращательном намагничивании, как показывают опыты, зависят от максимального значения магнитной индукции и числа периодов или циклов перемагничивания в единицу времени. Отступления от гармонического изменения магнитной индукции (по закону синуса) не оказывают заметного влияния на величину потерь на гистерезис. В общем потери на гистерезис в железе при вращательном намагничивании и при намагничивании в противоположных направлениях по имеющимся в настоящее время опытным данным мало отличаются друг от друга. При больших индукциях, порядка $15\,000 \div 20\,000$ G, потери на вращательный гистерезис становятся немного меньше, чем при линейном намагничивании.

Однако при решении практических задач для упрощения расчетов предполагают, что потери при вращательном намагничивании будут такие же, как и при линейном намагничивании, и подсчитывают их по тем же формулам.

79. Катушки с железом

Рассмотрим теперь катушку, внутри которой находится железо и сопротивление обмотки которой пусть равняется конечной величине r .

Железный сердечник может быть замкнут или он может иметь воздушный зазор (фиг. 216).

Напряжение у зажимов $\dot{U} = m_U \cdot \overline{OU}$ (фиг. 212) распадается на две слагающих: одна, — $\dot{E}_1 = m_U \cdot \overline{OE'_1}$, уравновешивает противо-э. д. с.,

наводимую магнитным потоком $\dot{\Phi}_m = m_\Phi \cdot \overline{O\Phi_m}$,

а другая, $r\dot{I}_0 = m_U \cdot \overline{E'_1U}$, покрывает активное

падение напряжения и по фазе совпадает с током. Последний в свою очередь также состоит из

двух слагающих: одна, $\dot{I}_\mu = m_I \cdot \overline{OI_\mu}$, возбуждает

магнитный поток и отстает от вектора $\overline{OE'_1}$ (а не от $\overline{OU}$) на 90° , а другая, $\dot{I}_a = m_I \cdot \overline{OI_a}$, обуслов-

ливается потерями в железе и по фазе совпадает с $\overline{OE'_1}$.

В зависимости от степени насыщения железа

отношение $\frac{E'_1}{I_0}$ меняет свою величину, а потому

ток $I_0 = \sqrt{I_\mu^2 + I_a^2}$ в катушке при заданном на-

пряжении у зажимов U может быть найден лишь

путем приближенного подсчета. Активное падение

напряжения бывает обыкновенно сравнительно

невелико, и как первое приближение противо-

э. д. с. может быть приравнена напряжению у

зажимов:

$$U \approx E_1 = 4kfw\Phi_m. \quad (79,1)$$

Из этого уравнения можно вычислить магнитный поток, и из расчета магнитной цепи найти соответствующее этому потоку необходимое число ампервитков. Разделив последнюю величину на число витков и на

$\sqrt{2}$, мы получим эффективное значение намагничивающей слагающей тока I_μ . Вычислив потери в железе для отдельных частей сердечника

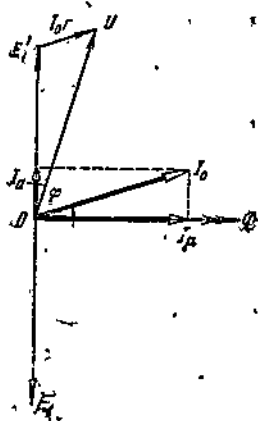
катушки в зависимости от магнитной индукции $B_m = \frac{\Phi_m}{S}$ или по кри-

вым потерь, мы найдем другую слагающую тока $\dot{I}_a = \frac{P_{Fe}}{E_1}$. Равнодей-

ствующая этих двух слагающих $I_0 = \sqrt{I_\mu^2 + I_a^2}$ даст ток в катушке, когда

магнитный поток равен вычисленной выше величине Φ_m . Для нахождения

напряжения у зажимов к слагающей — $E_1 = m_U \cdot \overline{OE'_1}$, уравновешивающей



Фиг. 212. Векторная диаграмма реактивной катушки с железом.

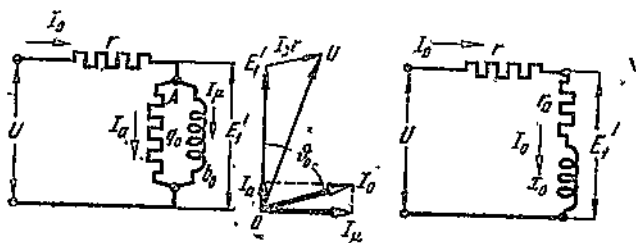
противо-э. д. с., мы должны прибавить активное падение напряжения rI_0 , которое по фазе совпадает с током. Полученное напряжение $\dot{U} = m_U \cdot \overline{OU}$ может оказаться большим, чем действительное напряжение у зажимов вследствие того, что мы в первом приближении пренебрегли активным падением напряжения. В небольших пределах ток можно считать пропорциональным напряжению, а потому для получения надлежащей величины тока следует всю диаграмму пропорционально уменьшить. Сдвиг фаз между U и I_0 можно определить непосредственным измерением угла φ или на основании уравнения мощности:

$$UI_0 \cos \varphi = rI_0^2 + P_{\text{Fe}},$$

откуда коэффициент мощности будет равен

$$\cos \varphi = \frac{rI_0^2 + P_{\text{Fe}}}{UI_0}. \quad (79,2)$$

Напряжение у зажимов $\dot{U}$ состоит из геометрической суммы двух векторов: rI_0 и $\dot{E}'_1$, а потому катушку, содержащую железо, мы можем



Фиг. 213. Схемы замещения реактивной катушки с железом.

рассматривать как совокупность двух приемников энергии, соединенных последовательно (фиг. 213), — один приемник имеет лишь активное (неиндуктивное) сопротивление r , и в нем напряжение совпадает по фазе с током, в другом же приемнике (A) ток I_0 отстает от напряжения $\dot{E}'_1$ на угол ϑ_0 . Проводимость последнего приемника мы можем представить себе состоящей из двух проводимостей: активной g_0 и реактивной b_0 .

Активная проводимость второго приемника определяется из соотношения

$$I_a = I_0 \cos \vartheta_0 = g_0 E'_1,$$

откуда

$$g_0 = \frac{I_a}{E'_1} = \frac{I_a E'_1}{E_1'^2} = \frac{P_{\text{Fe}}}{E_1'^2},$$

реактивная проводимость — из соотношения

$$I_\mu = I_0 \sin \vartheta_0 = b_0 E'_1,$$

откуда

$$b_0 = \frac{I_\mu}{E'_1}.$$

Зная g_0 и b_0 , мы можем определить активное сопротивление

$$r_0 = \frac{g_0}{g_0^2 + b_0^2}$$

и реактанс

$$x_0 = \omega L_0 = 2\pi f L_0 = \frac{b_0}{g_0^2 + b_0^2}$$

второго приемника энергии, если бы мы его хотели заменить последовательным соединением активного и реактивного сопротивлений. На основании всего сказанного диаграмма катушки, содержащей железо, будет вполне тождественна с диаграммой схем соединений, изображенных на фиг. 213 справа и слева.

Катушки с железом находят себе широкое применение в разных автоматах и реле. Хотя механические силы, получающиеся в таких аппаратах под действием переменного магнитного поля (они направлены всегда в одну сторону), и колеблются между нулем и некоторой максимальной величиной, пропорциональной квадрату амплитуды магнитной индукции, однако благодаря большому числу перемен в единицу времени обычного переменного тока ($2f = 100$ Hz) даже легковесные части не в состоянии следовать за быстрыми изменениями механических сил, а потому при расчетах можно принимать, что в этих аппаратах действуют силы, пропорциональные среднему значению квадратов магнитной индукции, т. е. $\frac{B_m^2}{2}$.

При помощи катушек, содержащих железо, можно без большой затраты энергии (в противоположность неиндуктивным сопротивлениям) в значительной мере понизить напряжение; такие катушки называются иногда дроссельными.

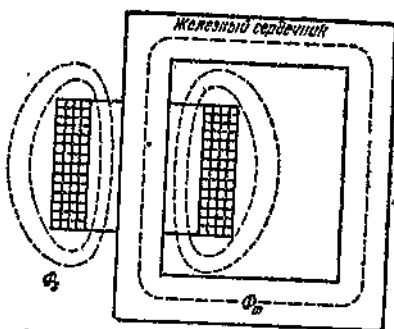
Такие дроссельные катушки должны при заданном напряжении у зажимов и заданном токе обладать определенным реактивным сопротивлением (см. задачу 47).

Так как при замкнутом железном сердечнике требуется весьма малая намагничивающая сила и реактивное сопротивление получается очень большим $x \approx \frac{U}{I}$, то, чтобы уменьшить реактивное сопротивление такой катушки, приходится вводить в магнитную цепь воздушный зазор. Меняя величину воздушного зазора, мы имеем возможность изменять при заданном токе напряжение у зажимов катушки (или, наоборот, при заданном напряжении изменять ток). Увеличивая воздушный зазор, мы при постоянном напряжении увеличиваем намагничивающий ток и, наоборот, уменьшая воздушный зазор, мы при заданном напряжении уменьшаем ток.

В электрических установках, однако, избегают применять дроссельные катушки для снижения напряжения ввиду получающегося сдвига между напряжением сети и током и предпочитают ставить вместо них трансформаторы или автотрансформаторы, которые при той же затрате энергии дают значительно больший коэффициент мощности.

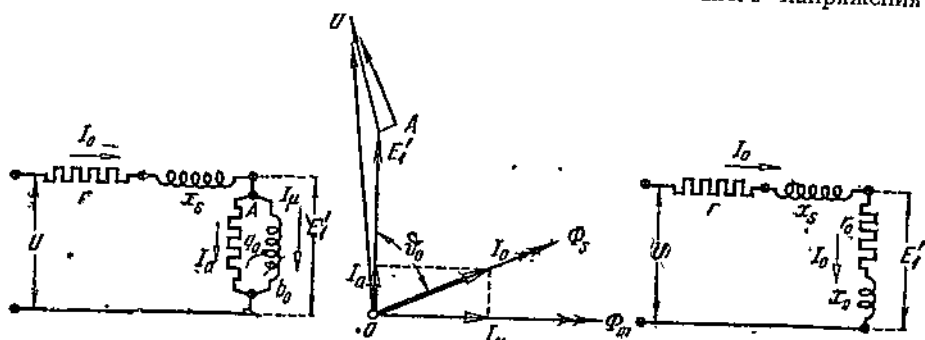
Выше мы предполагали, что все витки пронизываются одним и тем же магнитным потоком, который проходит через железный сердечник.

занимающий все пространство внутри катушки. Однако, если кроме магнитного потока, проходящего через железный сердечник, витки катушки пронизываются еще и магнитным потоком, замыкающимся помимо железного сердечника (фиг. 214), то наводимая в катушке противо-э. д. с. будет состоять из двух слагающих: 1) одной (в большинстве случаев более значительной), наводимой магнитным потоком $\Phi_m = m_\Phi \cdot O\Phi_m$, проходящим через железо и отстающим от тока в катушке I_0 на угол $90^\circ - \vartheta_0$ (фиг. 215); 2) другой, наводимый магнитным потоком $\Phi_s = m_\Phi \cdot O\Phi_s$, проходящим большую часть своего пути не через железо и совпадающим по фазе с током I_0 . Последний магнитный поток называют обыкновенно магнитным потоком рассеяния.



Фиг. 214. Дроссельная катушка с магнитным рассеянием.

Поэтому внешнее напряжение, прикладываемое к зажимам катушки, должно кроме слагающей $\dot{E}'_1$, уравновешивающей э. д. с., наводимую основным магнитным потоком Φ_m и опережающую вектор тока $\dot{I}_0 = m_I \cdot \overline{O\dot{I}_0}$ на угол $\vartheta_0 < 90^\circ$, и активного падения напряжения $r\dot{I}_0 = m_U \cdot \overline{E'_1 A}$, совпадающего по фазе с током, содержать еще одну слагающую, уравновешивающую э. д. с., наводимую магнитным потоком рассеяния Φ_s , находящимся в фазе с током I_0 . Эта слагающая внешнего напряжения



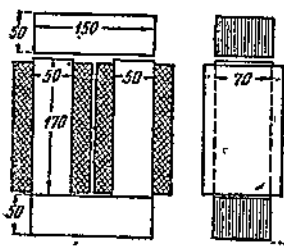
Фиг. 215. Схемы замещения и векторная диаграмма реактивной катушки с магнитным рассеянием.

$E_s = 4,44 j\omega\Phi_s$ как чисто индуктивное падение напряжения будет опережать ток на 90° .

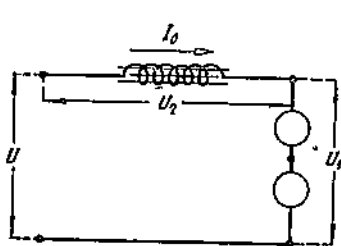
В соответствии с этим мы для построения векторной диаграммы и численных расчетов можем в основу положить схему замещения (фиг. 215), которая состоит из двух частей: одной, состоящей из активного сопротивления r и реактивного сопротивления $X_s = \frac{E_s}{I_0}$, не содержащего же-

леза, и другой, которая представляет собой катушку с железом без магнитного рассеяния и без активного сопротивления и которая эквивалентна двум параллельным ветвям с соответствующими активными и реактивными проводимостями g_0 и b_0 , определяемыми по потерям в железе и намагничивающему току (или же одной ветви с двумя последовательными элементами r_0 и x_0).

Задача 47. Дана дроссельная катушка с железным сердечником с указанными на фиг. 216 размерами (в миллиметрах). Сердечник имеет два воздушных зазора и состоит из 126 листов толщиной $d = 0,5$ мм. Катушка имеет обмотки по 108 витков с сечением (медных) проводов $10,3$ мм². Эта катушка присоединена последовательно с двумя дугowymi фонарями (представляющими собой неиндуктивную нагрузку), берущими каждый 15 А при напряжении 35 В, к сети 50-периодного тока с напряжением, равным 110 В. Требуется опреде-



Фиг. 216. Дроссельная катушка для регулирования напряжения в сети. Размеры в миллиметрах.



Фиг. 217. Схема и векторная диаграмма к задаче 47.

лить потери в железе, примерную величину воздушного зазора и коэффициент мощности всей цепи (фиг. 217).

Решение. Так как потери в дроссельной катушке сравнительно невелики, то для предварительного подсчета мы можем принять, что сдвиг фаз между током и напряжением у зажимов катушки равен 90° . Тогда

$$U_2 \approx \sqrt{U^2 - U_1^2} = \sqrt{110^2 - 70^2} \text{ В} = 84 \text{ В}.$$

Приравнявая U_2 падающей в катушке противо-э. д. с.

$$U_2 = E_1 = 4,44 f \nu \Phi_m,$$

находим магнитный поток

$$\Phi_m = \frac{E_1}{4,44 f \nu} = \frac{84}{4,44 \cdot 50 \cdot 216} \text{ В сек} = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ В сек} = 175 000 \text{ М (максвеллов)}.$$

$$\Phi_m = S B_m; \quad S = 0,5 \cdot 126 \cdot 50 \text{ мм}^2 = 31,5 \text{ см}^2;$$

$$B_m = \frac{175 000}{31,5} \text{ Г} = 5,500 \text{ Г};$$

объем железа

$$V_1 = 2 \cdot 31,5 (15 + 17) \text{ см}^3 = 2 020 \text{ см}^3 = 2,02 \text{ дм}^3,$$

вес железа

$$G = 2,02 \cdot 7,8 \text{ кг} = 15,8 \text{ кг};$$

потери на гистерезис [см. формулу (74,2) и таблицу]

$$P_H = \left[0,9 \frac{50}{100} \cdot \frac{5 500}{10 000} + 3,5 \frac{50}{100} \cdot \left(\frac{5 500}{10 000} \right)^2 \right] 15,8 \text{ Вт} = 12,5 \text{ Вт};$$

потери на вихревые токи [см. формулу (75,4) и таблицу]

$$P_F = 5,7 \left[\frac{50}{100} \cdot \frac{5500}{10000} \right]^2 15,8 \text{ W} = 7 \text{ W};$$

потери в железе

$$P_{Fe} = (12,5 + 7) \text{ W} = 19,5 \text{ W};$$

сопротивление обмотки

$$r = \frac{l}{\gamma S} = \frac{w l_{med}}{\gamma S};$$

средняя длина одного витка

$$l_{med} = (2 \cdot 50 + 2 \cdot 70 + \pi \cdot 50) \text{ mm} = 397 \text{ mm} = 0,397 \text{ m};$$

$$r = \frac{216 \cdot 0,397}{55 \cdot 10,3} \Omega = 0,151 \Omega;$$

потери в меди

$$P_{Cu} = r I_0^2 = 0,151 \cdot 15^2 \text{ W} = 34,5 \text{ W};$$

все потери в дроссельной катушке составляют

$$P_2 = U_2 I_0 \cos \varphi_2 = (19,5 + 34,5) \text{ W} = 54 \text{ W}.$$

Из треугольника напряжений следует

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2 U_1 U_2 \cos \varphi_2 = U_1^2 + U_2^2 + 2 U_1 \frac{P_2}{I_0};$$

откуда

$$U_2 = \sqrt{U^2 - U_1^2 - 2 U_1 \frac{P_2}{I_0}} = \sqrt{110^2 - 70^2 - 2 \cdot 70 \cdot \frac{54}{15}} \text{ V} = 82 \text{ V}$$

вместо принятых 84 V. Если мы сделаем пересчет на

$$E_1 \approx U_2 = 82 \text{ V},$$

то получим

$$\Phi_m = 171 \text{ 500 M}; B_m = 5 \text{ 440 G}; P_H = 12 \text{ W}; P_F = 6,6 \text{ W}; P_{Fe} = 18,6 \text{ W};$$

$$I_a = \frac{P_{Fe}}{E_1} = \frac{18,6}{82,1} \text{ A} = 0,227 \text{ A}; \quad \cos \varphi_0 = \frac{I_a}{I_0} = \frac{0,227}{15} = 0,015;$$

$$\varphi_0 = 81^\circ 20'.$$

Более точно величина наводимой в катушке э. д. с. определяется из соотношения

$$E_1 = U_2 - r I_0 \cos \varphi_0 = (82 - 15 \cdot 0,151 \cdot 0,015) \text{ V} \approx 82 \text{ V},$$

Амплитуда намагничивающей силы равна

$$w I_0 \sqrt{2} = 216 \cdot 15 \cdot \sqrt{2} \text{ AW} = 4580 \text{ AW}$$

ампероборотов. При индукции $B_m = 5 \text{ 440 G}$ на каждый сантиметр требуется

$w_0 = 2,0 \frac{\text{A}}{\text{cm}}$. Длина пути индукционной линии в железе

$$l = (2 \cdot 15 + 2 \cdot 17) \text{ cm} = 64 \text{ cm}; AW_{Fe} = 2,0 \cdot 64 \text{ AW} = 128 \text{ AW}.$$

Остается в избытке $(4580 - 128) \text{ AW} = 4452 \text{ AW}$.

Напряженность поля в воздушном зазоре будет

$$H_0 = \frac{B_m}{\mu_0} = 0,8 \cdot 5 \text{ 440} \frac{\text{A}}{\text{cm}} = 4 \text{ 350} \frac{\text{A}}{\text{cm}}.$$

Следовательно, величина обоих воздушных зазоров должна быть

$$2\delta_0 = \frac{4452}{4350} \text{ cm} \approx 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm} \text{ и } \delta_0 = 5 \text{ mm}.$$

Коэффициент мощности всей цепи будет

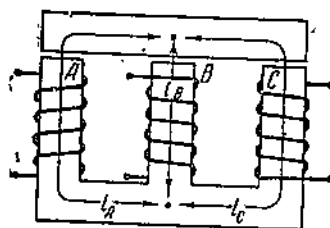
$$\cos \varphi = \frac{P}{U I_0} = \frac{P_1 + P_2}{U I_0} = \frac{70 \cdot 15 + 54}{110 \cdot 15} = 0,67.$$

80. Трехфазные катушки с железом

Для трехфазного тока сердечники трех однофазных катушек могут быть объединены в одну общую магнитную систему, если замкнуть три стержня с обоих концов общими ярмами (стержнями, набранными из железных листов (фиг. 218).

Трем э. д. с., наводимым в обмотках трех фаз, соответствуют три магнитных потока

$$\left. \begin{aligned} e_A &= -w \frac{d\Phi_A}{dt} = E_m \sin \omega t, & \Phi_A &= \Phi_m \cos \omega t; \\ e_B &= -w \frac{d\Phi_B}{dt} = E_m \sin (\omega t - 120^\circ), & \Phi_B &= \Phi_m \cos (\omega t - 120^\circ); \\ e_G &= -w \frac{d\Phi_G}{dt} = E_m \sin (\omega t - 240^\circ), & \Phi_G &= \Phi_m \cos (\omega t - 240^\circ), \end{aligned} \right\} (80,1)$$



Фиг. 218.

равные по своим амплитудам, опережающие соответствующие э. д. с. на 90° и сдвинутые в своих фазах друг относительно друга на 120° . Сумма мгновенных значений этих трех магнитных потоков равна нулю, а потому они взаимно уравновешивают друг друга

$$\dot{\Phi}_A + \dot{\Phi}_B + \dot{\Phi}_G = 0.$$

Вследствие несимметрии путей магнитных потоков отдельных фаз (неравенство длин пути индукционных линий) намагничивающие токи в фазах будут отличаться друг от друга. Если обмотки соединены в звезду с нулевым проводом, то токи в фазах, у которых длиннее путь индукционных линий, будут больше, как это следует из уравнений намагничивающих сил

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2} I_A w &= \left[H_{Fe} l_A + \frac{B_m}{\mu_0} \delta_A \right]; \\ \sqrt{2} I_B w &= \left[H_{Fe} l_B + \frac{B_m}{\mu_0} \delta_B \right]; \\ \sqrt{2} I_G w &= \left[H_{Fe} l_G + \frac{B_m}{\mu_0} \delta_G \right], \end{aligned} \right\} (80,2)$$

где I_A, I_B, I_G — эффективные значения намагничивающих токов; B_m — магнитная индукция в воздушном зазоре; $H_{Fe} = \frac{B_m}{\mu}$ — напряженность магнитного поля в железе; l_A, l_B, l_G — длина индукционных линий отдельных фаз в железе и $\delta_A, \delta_B, \delta_G$ — общая длина воздушных зазоров каждой фазы.

Если обмотки трех фаз соединены в звезду без нулевого провода, то токи в трех фазах будут не равны между собой и угол сдвига между ними будет отличаться от 120° .

В этом случае задача проще всего решается путем нахождения реактивной проводимости каждой фазы в отдельности. Если намагничивающая сила $\sqrt{2} I_A w$, действующая в первом стержне на участке между точками разветвления магнитных потоков, создает поток

$$\Phi_A = \sqrt{2} I_A w : \left[\frac{l_A}{\mu S_A} + \frac{\delta_A}{\mu_0 S_0} \right],$$

то реактивное сопротивление будет равно

$$X_A = \frac{E_A}{I_A} = \frac{4,44 w \Phi_A}{I_A} = \frac{2 \pi f w^2}{\frac{l_A}{\mu S_A} + \frac{\delta_A}{\mu_0 S_0}}. \quad (80,3)$$

Аналогичным образом могут быть найдены и реактивные сопротивления для обмоток двух фаз x_b и x_c . Если пренебречь активными сопротивлениями обмоток и потерями в железе, то мы можем положить, что полные проводимости трех фаз будут равны

$$Y_A = \frac{-j}{x_A}; \quad Y_B = \frac{-j}{x_B}; \quad Y_C = \frac{-j}{x_C}.$$

По проводимостям трех фаз нетрудно определить смещение нейтрали относительно центра равностороннего треугольника напряжений

$$\dot{U}_0 = \frac{Y_A \dot{U}_1 + Y_B \dot{U}_2 + Y_C \dot{U}_3}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

Напряжения на концах каждой обмотки будут

$$\dot{U}_A = \dot{U}_1 - \dot{U}_0; \quad \dot{U}_B = \dot{U}_2 - \dot{U}_0 \quad \text{и} \quad \dot{U}_C = \dot{U}_3 - \dot{U}_0,$$

а токи

$$I_A = Y_A \dot{U}_A; \quad I_B = Y_B \dot{U}_B \quad \text{и} \quad I_C = Y_C \dot{U}_C.$$

Когда, как это обыкновенно бывает, пути магнитных потоков крайних катушек одинаковы $Y_A = Y_C$, то, так как $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0$,

$$\dot{U}_0 = \frac{(Y_B - Y_A) \dot{U}_2}{Y_B + 2Y_A} = \frac{(y_B - y_A) \dot{U}_2}{y_B + 2y_A} = \frac{x_A - x_B}{x_A + 2x_B} \dot{U}_2 = m_U \dot{U}_0$$

и напряжение на концах средней катушки

$$\dot{U}_B = \dot{U}_2 - \dot{U}_0 = \frac{3x_B}{x_A + 2x_B} \dot{U}_2$$

будет меньше фазового напряжения сети U_2 , но будет с ним совпадать по фазе. Ток в средней катушке будет отставать по фазе от $\dot{U}_2$ на 90° . Что касается токов в крайних катушках, то они между собой равны по величине $I_A = I_C$, будут больше I_B и будут относительно $\dot{I}_B$ повернуты в разные стороны на один и тот же угол, так как $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

При практическом решении такой задачи можно поступить следующим образом:

Пусть $I'_A = I'_C$ и I'_B — эффективные значения намагничивающих токов в трех фазах в случае, когда все три фазы пронизываются магнитными потоками одной и той же величины, сдвинутыми на 120° и пусть

$$I'_A - I'_B = I'_C - I'_B = I_0.$$

Если бы звезда имела нулевой провод, то через нулевой провод протекал бы ток

$$I'_A + I'_B + I'_C = -I_0,$$

так как, если бы мы к I'_B прибавили I_0 , то мы имели симметричную трехфазную систему токов.

Положим теперь, что нулевого провода нет. Чтобы восстановить равновесие токов в нейтральной точке звезды, необходимо наложить на

ток $-I_0$ ток обратного направления, т. е. I_0 , который по фазе будет совпадать с током I'_B и будет поровну делиться между тремя обмотками. Соответствующее построение сделано на фиг. 219.

Для получения векторов напряжений на концах отдельных катушек мы должны провести линии

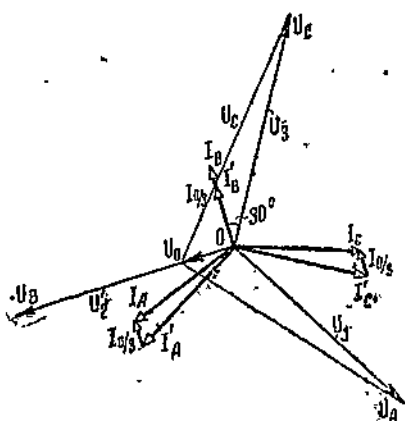
$$m_u \cdot \overline{U_0 U_A} = \dot{U}_A; m_u \cdot \overline{U_0 U_B} = \dot{U}_B; m_u \cdot \overline{U_0 U_C} = \dot{U}_C.$$

Из диаграммы видно, что ток I_B в средней катушке отстает от напряжения на ее концах на 90° , а потому поглощаемая в средней катушке

мощность равна нулю; что касается двух других фаз, то угол в третьей фазе между напряжением $\dot{U}_C = m_u \overline{U_0 U_C}$ и током $I_C = m_I \dot{O} I_C$ меньше 90° , а в первой фазе угол между напряжением $\dot{U}_A = m_u \overline{U_0 U_A}$ и током $I_A = m_I \dot{O} I_A$ больше 90° . Хотя общая сумма мощностей во всех трех фазах при отсутствии потерь равна нулю, но в результате несимметрии магнитной цепи фаза C будет поглощать энергию из сети и отдавать ее через фазу A обратно в сеть.

Кроме несимметрии магнитной цепи на токи в отдельных фазах может оказывать большое влияние насыщение железа. Для упрощения рассмотрения этого явления предположим, что доли магнитной цепи, приходящиеся на каждую фазу, тождественны.

Если бы каждая фаза питалась самостоятельно от синусоидального внешнего напряжения, например, при соединении обмоток в треугольник или в звезду с нулевым проводом, то при синусоидальном измене-



Фиг. 219.

нии магнитных потоков в случае насыщения железа намагничивающие токи кроме основных синусоид содержали бы ряд высших гармоник, из которых особо выделялась бы третья гармоника-

$$i_1 = I_{1m} \cos \omega t + I_{3m} \cos (3\omega t - \varphi_3) + I_{5m} \cos (5\omega t - \varphi_5) \dots;$$

$$i_2 = I_{1m} \cos (\omega t - 120^\circ) + I_{3m} \cos (3\omega t - \varphi_3) + I_{5m} \cos (5\omega t - 240^\circ - \varphi_5) \dots;$$

$$i_3 = I_{1m} \cos (\omega t - 240^\circ) + I_{3m} \cos (3\omega t - \varphi_3) + I_{5m} \cos (5\omega t - 120^\circ - \varphi_5).$$

Линейные токи же кроме основных синусоид и третьих гармоник будут содержать еще пятые, седьмые и т. д. гармоники, которые при соединении в звезду будут компенсировать друг друга в нулевой точке и не попадут в нулевой провод.

При соединении треугольником третьи гармоники токов замыкались бы в самом треугольнике и не попадали бы в сеть. При соединении в звезду с нулевым проводом, даже при синусоидальном напряжении сети, в нейтральном проводе будет протекать ток, равный тройной сумме всех гармоник кратных трем.

Иначе обстоит дело, если три фазы соединены в звезду без нулевого провода. Так как в этом случае токи в фазах не могут содержать третьих гармоник, то это равноценно выпаданию из намагничивающей силы третьих гармоник. Поэтому магнитные потоки в фазах будут изменяться не по закону синуса, а по другому закону, им будет не доставать до синусоид тех слагающих, которые обусловлены были бы третьими гармониками тока, другими словами, на синусоидальное изменение магнитных потоков в каждой фазе будут накладываться магнитные потоки тройной частоты, которые во всех трех обмотках будут совпадать в своих мгновенных значениях, т. е. будут направлены в трех стержнях всегда в одинаковую сторону. Эти магнитные потоки тройной частоты в трех стержнях не будут уравновешивать друг друга, а будут замыкаться через окружающее пространство.

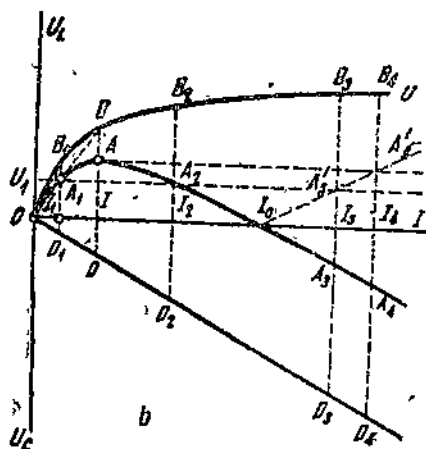
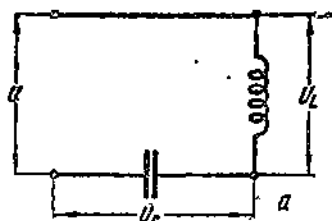
Магнитные потоки тройной частоты наводят в трех обмотках одинаковые э. д. с. тройной частоты. Если трехфазная система симметрична относительно земли, то нулевая точка трехфазной катушки будет менять свое напряжение по отношению к земле с тройной частотой. Если же трехфазная питающая сеть совершенно изолирована относительно земли, а заземлена нулевая точка катушки, то вся система будет менять свой потенциал с тройной частотой соответственно э. д. с. тройной частоты, наводимых в стержнях.

81. Последовательное соединение катушки с железом и конденсатора

Весьма своеобразное явление наблюдается при последовательном соединении катушки с железом и конденсатора (емкости) (фиг. 220, а) благодаря непостоянству индуктивности, на величину которой влияет степень насыщения железа. Зависимость так называемого реактивного напряжения (т. е. противо-э. д. с.) $U = E_1 = 4k/\omega \Phi_m$ от тока характеризуется не прямой (как это было бы при $\omega L = \text{const}$), а некоторой кривой, ординаты которой пропорциональны ординатам кривой намагничивания. Для упрощения предположим, что активное сопротивление

катушки ничтожно мало, $r=0$, что потерями в железе можно также пренебречь, $P_{Fe}=0$ и что отступление кривой намагничивания от прямой не вызывает искажения кривой тока, т. е. что, несмотря на насыщение железа при синусоидальном внешнем напряжении, реактивное напряжение катушки и ток будут меняться также по закону синуса, что равносильно пренебрежению высшими гармониками.

При таком предположении напряжение U_L у зажимов катушки будет опережать ток I на 90° . У конденсатора же, наоборот, напряжение $U_C = \frac{I}{\omega C}$ будет на 90° отставать от тока.



Фиг. 220. Последовательное соединение катушки с железом и конденсатора.

Будем откладывать вектор тока $\vec{I} = m_I \cdot \vec{OI}$ по горизонтали (фиг. 220, б), тогда вектор напряжения у катушки $\vec{U}_L = m_U \cdot \vec{OU}_L$ будет расположен по вертикали. Если концы векторов $\vec{OU}_L$ и $\vec{OI}$ рассматривать как координаты, то эти координаты дадут кривую OB_1BB_2 , которая будет протекать так же, как кривая намагничивания. Если для каждого значения $I = m_I \cdot OI$ строить векторы напряжений между обкладками конденсатора, то мы должны $\vec{U}_C = \frac{I}{\omega C}$ откладывать по вертикали вниз. Концы векторов напряжений $\vec{U}_C$, соответствующих значениям токов I , будут определять некоторую наклонную прямую OD_1DD_2 .

Внешнее напряжение $\vec{U}$ будет определяться разностью (геометрической суммой) соответствующих напряжений:

$$\vec{U} = \vec{U}_L + \vec{U}_C = m_U \cdot (\vec{OU}_L + \vec{OU}_C) = m_U \cdot \vec{OU}.$$

При заданном токе I внешнее напряжение U будет или опережать ток или отставать от него на 90° в зависимости от того, будет ли при данном токе I больше напряжение у катушки или напряжение у конденсатора.

Величина внешнего напряжения для какого-нибудь тока $\vec{OI}$ будет определяться разностью ординат кривых OB_1BB_2 и OD_1DD_2 в соответствующей точке I . Кривая разностей ординат OB_1BB_2 и OD_1DD_2 дает кривую $OA_1AA_2A_3$, которая позволяет для каждого тока $\vec{OI}$ находить

соответствующее внешнее напряжение. Так, например, току I_1 соответствует внешнее напряжение $I_1 A_1 = OU_1$. Если ордината лежит выше оси абсцисс, то это указывает на то, что ток отстает от внешнего напряжения на 90° , если ниже, то — что ток опережает внешнее напряжение на 90° и индуктивное напряжение меньше, чем напряжение у конденсатора. На чертеже часть кривой, лежащая ниже оси абсцисс, вычерчена еще раз, как зеркальное изображение над осью абсцисс в виде пунктирной линии.

Из этой кривой вытекает, что при внешнем напряжении, например

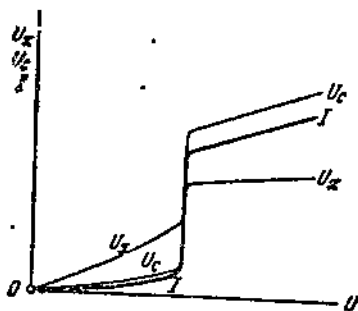
$$OU_1' = I_1 A_1 = I_2 A_2 = I_3 A_3'$$

возможны три значения тока OI_1 , OI_2 и OI_3 , причем первые два тока отстают от внешнего напряжения, а третий OI_3 опережает его. Из этих трех состояний, вообще говоря, устойчивы будут только OI_1 и OI_3 , так как здесь мы имеем восходящую характеристику, когда с увеличением напряжения ток возрастает, а с уменьшением напряжения ток уменьшается, и ток OI_2 представляет собой неустойчивое состояние, так как здесь характеристика ниспадающая; с уменьшением напряжения ток увеличивается, а с увеличением напряжения ток уменьшается, так что малейшее отклонение напряжения в ту или другую сторону вызывает противоположное изменение тока. Состояния OI_3 можно добиться лишь путем первоначального повышения и затем постепенного понижения внешнего напряжения. Если внешнее напряжение постепенно повышать с нуля, ток будет увеличиваться, причем будет увеличиваться также напряжение у катушки $I_1 B_1$ и напряжение у емкости $I_2 D_1$. Когда внешнее напряжение достигнет величины $U = m_U \cdot I A$ и соответственно с этим $U_L = m_U \cdot I B$ и $U_C = m_U \cdot I D$, мы получаем предельное (критическое) внешнее напряжение, при котором ток отстает от напряжения. При дальнейшем повышении напряжения получается скачок: значение тока сразу увеличивается с OI до OI_4 , при этом ток изменяет свою фазу на противоположную, т. е. ток будет теперь опережать внешнее напряжение. Одновременно с этим изменится на 180° фаза напряжения у зажимов индукционной катушки (опрокидывается фаза). В дальнейшем с увеличением U мы будем иметь плавное увеличение тока. Если теперь начать уменьшать внешнее напряжение U , то мы можем получить при внешнем напряжении $U_1 = m_U \cdot I_3 A_3'$ ток, который будет опережать напряжение, при этом $U_L = m_U \cdot I_3 B_3$ и $U_C = m_U \cdot I_3 D_3$.

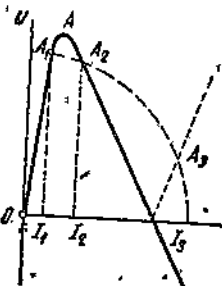
Зависимость U_L и U_C от внешнего напряжения U при постоянной частоте представлена на фиг. 221. Мы видим, что сначала U_L и U_C увеличиваются примерно пропорционально внешнему напряжению U , при этом U_L и U_C оба нарастают пропорционально U , но U_L нарастает быстрее, чем U_C . Когда же внешнее напряжение достигает критического напряжения, то происходит опрокидывание фаз, ток скачкообразно сразу увеличивается, и одновременно вместо отставания ток будет опережать внешнее напряжение U . При дальнейшем увеличении U напряжение у катушки с железом достигает некоторой постоянной величины $U_L = \omega L I = \text{const}$, так как магнитный поток, пропорциональный $L I$, благодаря насыщению будет весьма мало увеличиваться с увеличением тока.

Описанные выше явления имеют место лишь в том случае, если кривая зависимости U_L от I (фиг. 220) при малых значениях I имеет большие ординаты, чем кривая U_C .

До сих пор мы не учитывали падения напряжения в активном сопротивлении. Последнее мы могли бы учесть, если бы по оси ординат откладывали не токи, а пропорциональные им падения напряжения в активном сопротивлении RI , которые по фазе совпадают с током. Так как активные и реактивные падения напряжения складываются под прямым углом, то зависимость между током и внешним напряжением для каждого тока I определялась бы по величине и фазе гипотенузой или расстоянием от точки O до соответствующего конца ординаты, восстановленной в конце вектора RI .



Фиг. 221. Изменение тока, индуктивного напряжения и напряжения у емкости в зависимости от внешнего напряжения сети.



Фиг. 222. Последовательное соединение катушки с железом и конденсатора при учете сопротивления.

Для того чтобы определить значения тока для какого-нибудь значения внешнего напряжения $\dot{U} = m_U \cdot \overline{OU}$, проводим дугу радиусом $\overline{OU}$ (фиг. 222). Эта дуга может пересечь кривую $\overline{OA_1AA_2A_3}$ или в одной или в трех точках. В последнем случае возможны опять три значения тока, из них два будут устойчивы (на восходящих частях кривой) и одно неустойчивое (на нисходящей части кривой).

Если мы будем постепенно повышать внешнее напряжение, то, когда внешнее напряжение достигает некоторого предельного значения, происходит скачок тока, который вызывает не только повышение напряжения на катушке и напряжения у конденсатора, но и опрокидывает фазу тока, так как ток после скачка будет уже не отставать от внешнего напряжения, а будет опережать его. Одновременно с этим будет опрокинута (изменена фаза) напряжения и у катушки и у конденсатора. Имеющее при этом место значительное повышение этих напряжений на практике может вызвать перенапряжения, угрожающие целостности установки.

Возьмем для примера ненагруженный трансформатор, присоединенный к станции, имеющей разветвленную кабельную сеть, через длинный кабель (фиг. 223). Если кабель окажется присоединенным на станции лишь одним концом или если произойдет обрыв одной жилы кабеля, то соеди-

нение трансформатора со станцией будет осуществляться: с одной стороны, непосредственно через исправную жилу кабеля, а с другой стороны, — через две последовательно соединенные группы емкостей, одной группой между неисправной жилой и землей и другой — между землей и теми жилами оставшейся части, которые присоединены к тому же полюсу. Вследствие этого у зажимов трансформатора, а также между жилами неисправного кабеля могут появиться перенапряжения, во много раз превышающие нормальное напряжение.

Описанные явления в трехфазных кабельных сетях, когда одна фаза оказывается присоединенной через емкость, при слабых нагрузках могут привести к изменению очередности фаз, что в свою очередь может повлечь за собой изменение направления вращения моторов.

Проследим еще явления, происходящие в цепях, в которых последовательно соединена катушка, содержащая железо, с емкостью при постоянном значении внешнего напряжения, но при переменной частоте. Без учета активного падения напряжения имеем, что внешнее

напряжение равно $\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_C = j \left(\omega L \dot{I} - \frac{\dot{I}}{\omega C} \right)$.

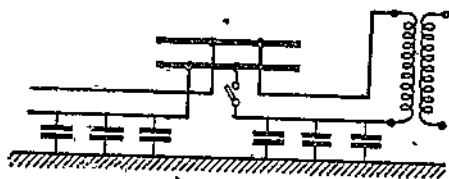
При весьма малых частотах $\dot{U}_L = \omega L \dot{I}$ будет значительно меньше $\dot{U}_C = \frac{\dot{I}}{\omega C}$, которое будет приблизительно равно внешнему напряжению. Ток при этом будет опережать внешнее напряжение.

С увеличением частоты ток, а вместе с ним и $\dot{U}_L$ и $\dot{U}_C$, будут увеличиваться до тех пор, пока не будет достигнута такая частота, при которой дальнейшее увеличение частоты повлечет за собой не увеличение тока, а его уменьшение, т. е. пока изменение частоты не приведет к полосе неустойчивой (ниспадающей) части характеристики. При этой частоте будет иметь место опрокидывание фазы, и в дальнейшем ток уже не будет опережать, а будет отставать от внешнего напряжения, и одновременно с током изменят свои направления $\dot{U}_L$ и $\dot{U}_C$.

Характер дальнейшего изменения напряжений $\dot{U}_L$ и $\dot{U}_C$ при увеличении частоты зависит от относительной величины внешнего напряжения, но в общем можно сказать, что после опрокидывания фазы ток, а вместе с ним $\dot{U}_L$ и $\dot{U}_C$ уменьшаются по своей величине, причем $\dot{U}_L$ приближается к внешнему напряжению, а $\dot{U}_C$ приближается к нулю.

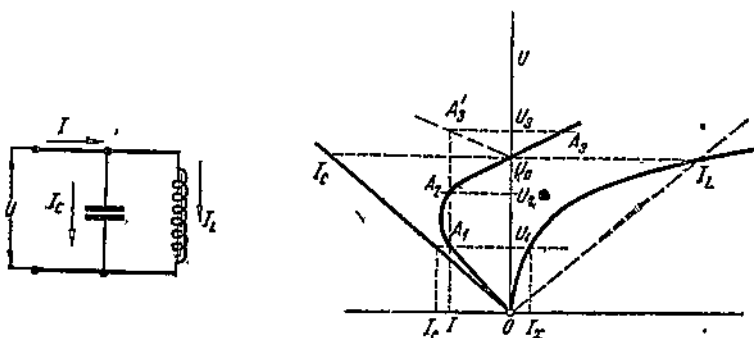
82. Параллельное соединение катушки с железом и конденсатора

При параллельном соединении катушки с железом и конденсатора, если не учитывать активного падения напряжения и потерь в катушке и считать, что ток в катушке будет изменяться по синусоиде, можно принять, что токи в обеих ветвях будут иметь противоположную фазу и общий ток будет равен разности токов в обеих ветвях. Как и в пре-



Фиг. 223. Перенапряжение в сетях с ненагруженным трансформатором, присоединенным к кабельной сети при заземлении или при обрыве одной жилы кабеля.

дыдущем параграфе при построении диаграммы, мы будем откладывать по вертикали внешнее напряжение, а по горизонтали — токи. Ток в катушке с железом отстает от напряжения на 90° и вектор его направлен по горизонтали вправо, а ток в конденсаторе опережает напряжение на 90° , и на чертеже его вектор направлен по горизонтали влево (фиг. 224). Если концы векторов напряжения и токов рассматривать как некоторые координаты, то они будут определять кривые, дающие зависимость между напряжением и токами. Для катушки мы будем иметь кривую, напоминающую кривую намагничивания, а для емкости — наклонную пря-



Фиг. 224. Параллельное соединение катушки с железом и конденсатора.

мую. Разность абсцисс этих двух кривых $I_C - I_L = I$ определит кривую тока в неразветвленной части цепи при разных значениях внешнего напряжения U . Зависимость между внешним напряжением и током во внешней цепи определится кривой $OA_1A_2A_3$. Эта кривая указывает на то, что если внешнее напряжение меньше $U_0 = m_U \cdot OU_0$, ток опережает внешнее напряжение, а при напряжениях больше $U_0 = m_U \cdot OU_0$ общий ток отстает от внешнего напряжения. Пользуясь этой кривой, мы можем определить, какое должно быть приложено внешнее напряжение, для того чтобы общий ток имел заданное значение. Для этого мы заданное значение тока $I = m_I \cdot OI$ откладываем по оси абсцисс и находим соответствующую ординату на кривой $OA_1A_2A_3$. Как видно из чертежа, возможны три значения напряжения OU_1 , OU_2 и OU_3 . При первых двух значениях внешнего напряжения ток будет опережать напряжение, при третьем значении OU_3 ток будет отставать от напряжения. Из этих трех возможных значений работа в ниспадающей части характеристики (при уменьшении напряжения ток увеличивается) будет неустойчива. На этом участке изменение напряжения в весьма небольших пределах, как говорят, опрокинет фазу тока. Точка пересечения кривой $OA_1A_2A_3$ с вертикальной линией является точкой резонанса, когда токи в обеих параллельных ветвях равны и противоположны по фазе. Теоретически при этом ток во внешней цепи должен был бы равняться нулю, в действительности же благодаря потерям (активным в меди и на перемагничивание железа) ток никогда не будет спадать до нуля.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Активная мощность 25
 - — несинусоидальных токов 223
 - проводимость 44, 45
 - слагающая несинусоидального тока 224
 - — — тока 45, 46, 64
 - — — катушки с железом 248, 252
- Активное падение напряжения 17, 22
 - — — при несинусоидальном напряжении 222
 - и реактивное (внутреннее) сопротивление проводов 189
 - сопротивление 17
- Амплитуда синусоидально изменяющейся величины 10, 15
- Бесселевы уравнения нулевого порядка 184
- Векторная диаграмма 10
 - — катушки с железом 256
- Взаимная индуктивность в цепях переменного тока 87
 - приведенная проводимость контура 100
- Высшие гармоники в трехфазных системах 234
- Графическое нахождение полного сопротивления параллельных ветвей 69
 - — формы кривой тока 214
 - — эффективного значения кривой тока или напряжения 216
- Двухфазная система 144
- Емкость в цепи переменного тока 26
- Закон взаимности 100
 - Кирхгофа в символической форме 66
 - Ома в символической форме 66
- Измерение мощности 57
 - — трехфазной системы при одинаковой нагрузке фаз 175
 - — трехфазного тока 175
 - — — по схеме Арона 177
 - — несинусоидальных токов 215
 - — реактивной мощности трехфазной системы 176
- Индуктивная э. д. с. 17, 20
- Индуктивность в цепи переменного тока 19
 - катушки 20
- Каждущаяся мощность несинусоидальных токов 223
 - — 25
- Каждущееся сопротивление 23, 30, 33
- Катушки с железным сердечником
- Комплексная форма активного падения напряжения 63
 - — — полной проводимости 64
- Комплексная форма полного сопротивления 63
 - — — реактивного падения напряжения 63
- Круговые диаграммы 108
- Круговая диаграмма общей схемы замещения 120
 - — — четырехполюсника 128
 - — — при постоянных напряжениях на его концах 133
- Коэффициент мощности 25, 221
 - форма кривой 17
- Линейное (междуфазовое) напряжение 141, 143
 - — напряжение трехфазной системы при несинусоидальном напряжении 235
- Линейный ток 147, 148
- Линейные токи трехфазной системы при несинусоидальном напряжении 238
- Магнитный поток катушки с железом 239, 240
- Мгновенная мощность многофазной системы 152
 - — переменного тока 19, 21, 28
- Метод векторных уравнений 126
- Метод Гельмгольца-Тевенена 74
 - инверсии 108
 - наложения 73
 - трех амперметров 58
 - — вольтметров 57
 - контурных токов 97
- Многоугольник проводимостей 47
- Многофазные системы несвязанные 137, 139
 - — — соединенные 137
 - — — симметричные 137
 - — — несимметричные 137
 - — — токи 136
- Мощность в комплексной форме 71
 - искажения 227
 - несинусоидальных токов 220
 - переменного тока 19, 44
 - трехфазной системы 153
- Намагничивающий ток катушки с железом 239, 240
- Неравномерное распределение магнитной индукции в железных листах 248
- Неодинаковая нагрузка трехфазной системы (звезда с нулевым проводом) 156
- Неодинаковая нагрузка трехфазной системы (звезда без нулевого провода) 158
 - — — — соединенной треугольником 162
- Неравномерное распределение плотности тока 180

- Несинусоидальные переменные токи 191
- Определение очередности фаз 168
- постоянных четырехполюсника 104
 - элементов цепи при несинусоидальном напряжении 218
- Опрокидывание фаз 168
- Опыт холостого хода и короткого замыкания 104
- Падение напряжения в линии 53
- Параллельное соединение (общий случай) 46
- — индуктивно связанных ветвей 90
 - — при несинусоидальном токе 230
- Первый закон Кирхгофа 46
- Передача энергии в контурах с магнитной связью 94
- — по линии 53
- Плотность тока в любой точке сечения проводника 188
- П-образная схема замещения 102
- Полная приведенная проводимость контура 100
- проводимость в комплексной форме 65
 - — цепи 23, 44, 45
- Полное сопротивление в комплексной форме 64
- Последовательное соединение индуктивно связанных ветвей 91
- — при несинусоидальном токе 228
 - — сопротивления, индуктивности и емкости 31
- Потери в железе (общие) 252
- — — неравномерном распределении магнитной индукции 252
 - — — на вихревые токи 246
 - — — в железных листах 247
 - — — железной проволоке 245
- Потери на гистерезис 243
- Потери напряжения на линии 53
- Преобразование треугольника в звезду и обратно 170
- шестифазной системы в трехфазную 138
- Проводимость в комплексной форме 64
- Распределение плотности тока в проводах 183
- Разложение в ряд выпрямленных синусоид 200
- — — Фурье трапеции 197
- Реактанс емкости 28, 30
- Реактивная мощность 25
- — несинусоидальных токов 223
- Реактивная проводимость 44, 45
- Реактивное падение напряжения 17, 24
- Реактивное сопротивление 21
- Резонансные кривые 39, 42
- — при несинусоидальном токе 219
- Резонанс напряжений 37
- токов 50
- Резонансная частота 37, 50
- Распределение токов в сложных цепях 72
- Рихтера формула 243
- Ряд Фурье 191
- Сдвиг фаз 24, 33
- Символический метод 60
- Сопротивление в цепи переменного тока 18
- Способ Перри 202
- Роте 204
 - Рунге
- Способ Фишера-Гингера 208
- Среднее арифметическое значение ординат кривой напряжения 16
- значение квадратов ординат синусоиды 14
 - — ординат синусоиды 12
 - — произведения ординат синусоид 13
- Средняя мощность 19, 24, 29, 31, 34
- Схема Арона 177
- Схемы замещения 101
- — катушки с железом 257, 259
- Т-образная схема замещения 102
- Топографическая диаграмма 153
- Треугольник проводимостей 44
- сопротивлений 35
- Трехфазная катушка с железом 262
- система (соединение звездой с нулевым проводом) 140
 - — — без нулевого провода 142
 - — — многоугольником 145
- Уравнения Максвелла 183
- Уравновешенные многофазные системы 151
- Фазовые токи и напряжение 136
- Фазовый угол 8
- Феррорезонанс напряжений 265
- токов 270
- Частота 5
- Электродвижущая сила взаимной индуктивности 87, 89
- Эквивалентная синусоида 244
- Эффективное значение несинусоидального тока и напряжения 216
- Эффективное значение тока и напряжения 14, 15, 16
- Явление в цепях переменного тока с несинусоидальным напряжением 211
- гистерезиса в цепях переменного тока 242